فصل 1

۱-۱ الف) نشان دهید، برای دو سیستم بزرگ در تماس گرمایی، تعداد $\Omega^{(\circ)}(E^{(\circ)},E_1)$ بخش ۱-۲ را می توان به صورت یک تابع گوسی با متغیر E_1 بیان کرد. عبارتی برای جذر میانگین مربعی انحراف E_1 از مقدار متوسط $\overline{E}_1$ برحسب کمیات معلوم مساله بدست آورید.

ب) یک ارزیابی صریح از جذر میانگین مربعی انحراف متغیر E_1 در حالتي، که سیستم های A_1 و A_2 گازهای ایده آل هستند انجام دهید.

حل:

$$\Omega^{(\circ)}(E_1,E_2)=\Omega_1(E_1)\Omega_2(E_2)=\Omega_1(E_1)\Omega_2\left(E^{(\circ)}-E_1\right)=\Omega^{(\circ)}\left(E^{(\circ)},E_1\right)\Rightarrow$$

$$\Omega^{(\circ)}\left(E^{(\circ)},E_1\right)=\Omega_1(E_1)\Omega_2\left(E^{(\circ)}-E_1\right)$$

در حالت تعادل احتمال تمام حالت هاي قابل دسترس يكسان بوده و انرژي در حالت تعادل انرژي است كه احتمال يافتن سيستم در آن انرژي ماكزيم باشد يعني:

$$\frac{dP(E_1)}{dE_1}=\circ \Rightarrow P(E_1)=C\,\Omega^{(\circ)}(E^{(\circ)},E_1) \Rightarrow \left.\frac{d\Omega^{(\circ)}\left(E^{(\circ)},E_1\right)}{dE_1}\right|_{E_1=\overline{E}_1}=\circ$$

$P(E_1)$ احتمال اين است كه سيستم داراي انرژي E_1 باشد.
حال Ω_1 و $\Omega_\circ$ را حول نقطه تعادل انرژي بسط مي دهيم:

$$\ln\Omega_1(E_1)=\ln\Omega_1(\overline{E_1})+\left.\frac{\partial\ln\Omega_1(E_1)}{\partial E_1}\right|_{E_1=\overline{E_1}}(E_1-\overline{E_1})$$

$$+\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2\ln\Omega_1(E_1)}{\partial^2 E_1}\right|_{E_1=\overline{E_1}}(E_1-\overline{E_1})^2+000$$

$$\ln\Omega_2(E_2)=\ln\Omega_2(\overline{E_2})+\left.\frac{\partial\ln\Omega_2(E_2)}{\partial E_2}\right|_{E_2=\overline{E_2}}(E_2-\overline{E_2})$$

$$+\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2\ln\Omega_2(E_1)}{\partial^2 E_2}\right|_{E_2=\overline{E_2}}(E_2-\overline{E_2})^2+000$$

$$\ln\Omega_1(E_1)=\ln\Omega_1(\overline{E_1})+\beta_1(E_1-\overline{E_1})+\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial\beta_1}{\partial E_1}\right|_{E_1=\overline{E_1}}(E_1-\overline{E_1})^2+000$$

$$\ln\Omega_2(E_2)=\ln\Omega_2(\overline{E_2})+\beta_2\big|_{E_2=\overline{E_2}}(E_2-\overline{E_2})+\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial\beta_2}{\partial E_2}\right|_{E_2=\overline{E_2}}(E_2-\overline{E_2})^2+000$$

در حالت تعادل داريم:

$$\beta_1=\beta_2=\beta \;\Rightarrow\; \left(E^{(\circ)}=\overline{E_1}+\overline{E_2}\ ,\ E^{(\circ)}=E_1+E_2\right)$$

$$E_2-\overline{E}_2=-(E_1-\overline{E_1}) \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ln\Omega_1(E_1)=\ln\Omega_1(\overline{E_1})+\beta(E_1-\overline{E_1})+\frac{1}{2!}\frac{\partial\beta}{\partial E_1}\Big|_{E_1=\overline{E_1}}(E_1-\overline{E_1})^2+\ldots \\ \ln\Omega_2(E^{(\circ)}-E_1)=\ln\Omega_2(E^{(\circ)}-\overline{E_1})-\beta(E_1-\overline{E_1})+\frac{1}{2!}\frac{\partial\beta}{\partial E_2}\Big|_{E_2=\overline{E_2}}(E_1-\overline{E_1})^2+000 \end{cases}$$

از جمع دو رابطه بالا

$$\ln\Omega_1(E_1)+\ln\Omega_2(E^{(\circ)}-E_1)=\ln\Omega_1(\overline{E_1})+\ln\Omega_2(E^{(\circ)}-\overline{E_1})$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial E_1}+\frac{\partial\beta}{\partial E_2}\right)(E_1-\overline{E_1})^2+000$$

$$\ln\left[\Omega_1(E_1)\Omega_2(E^{(\circ)}-E_1)\right]=\ln\left[\Omega_1(\overline{E_1})\Omega_2(E^{(\circ)}-E_1)\right]+\frac{1}{2}\alpha(E_1-\overline{E_1})^2$$

$$\ln\left[\Omega^{(\circ)}(E^{(\circ)},E_1)\right]=\ln\left[\Omega^{(\circ)}(E^{(\circ)},\overline{E_1})\right]+\frac{1}{2}\alpha(E_1-\overline{E_1})^2$$

$$\frac{\Omega^{(\circ)}(E^{(\circ)},E_1)}{\Omega^{(\circ)}(E^{(\circ)},\overline{E_1})}=\exp\left(\frac{1}{2}\alpha(E_1-\overline{E_1})^2\right)$$

که در این رابطه

$$\alpha=\frac{\partial\beta}{\partial E_1}+\frac{\partial\beta}{\partial E_2}=\alpha_1+\alpha_2$$

α کوچکتر از صفر است و مقداري منفي است زيرا :

$$\alpha_1=\frac{\partial\beta}{\partial E_1}=\frac{\partial\left(\frac{1}{kT}\right)}{\partial E^{(\circ)}}=-\frac{1}{k}\times\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial E_1}<\circ \ \Rightarrow\ \alpha<\circ\ \Rightarrow$$

$$\frac{\Omega^{(\circ)}\left(E^{(\circ)},E_1\right)}{\Omega^{(\circ)}\left(E^{(\circ)},\overline{E_1}\right)}=\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\left(E_1-\overline{E_1}\right)^2\right) \Rightarrow P\left(E_1\right)=Ce^{-\frac{1}{2}\alpha\left(E_1-\overline{E_1}\right)^2}$$

براي پيداكردن مقدار C از شرط زير استفاده مي كنيم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}P\left(E_1\right)dE_1=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-\frac{1}{2}\alpha\left(E_1-\overline{E_\circ}\right)^2}dE_1=1 \Rightarrow$$

$$C\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}=1 \Rightarrow C=\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \Rightarrow$$

$$P\left(E_1\right)=\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\alpha\left(E_1-\overline{E_{(\circ)}}\right)^2}$$

و اين همان تابع گوسي مورد نظر است. وقتي اين تابع به $\frac{1}{e}$ مقدار اوليه اش برسد، داريم:

$$-\frac{1}{2}\alpha\left(E_1-\overline{E_1}\right)^2=-1 \Rightarrow \left(\Delta E_1\right)^2=\sqrt{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\Delta E_1\right)^2=\sqrt{2}\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^{-\frac{1}{2}} \;,\; \alpha=\left.\frac{\partial^2\ln\Omega}{\partial E^2}\right|_{E=\overline{E}}=\left.\frac{\partial\beta}{\partial E}\right|_{E=\overline{E}}$$

ب) براي گاز ايده آل

$$E=\frac{3}{2}NkT=\frac{3}{2}\frac{N}{\beta}$$

$$\Delta=\sqrt{2}\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{\partial\beta}{\partial E_1} = \dfrac{3N_1}{2\overline{E}_1^2} \\ \alpha_2 = -\dfrac{\partial\beta}{\partial E_2} = \dfrac{3N_2}{2\overline{E}_2^2} = \dfrac{3N_2}{2\left(E_{(\circ)} - \overline{E}_1\right)^2} \end{cases}$$

$$\Delta = \sqrt{2}\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\frac{3N_1}{2\overline{E}_1^2} + \frac{3N_2}{2\left(E_{(\circ)} - \overline{E}_1\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

۱-۲ فرض کنید آنتروپی S و عدد آماری Ω سیستم فیزیکی از طریق یک تابع دلخواه به شکل $S = f(\Omega)$ به یکدیگر مربوط می شوند. نشان دهید که ویژگی جمع پذیری آنتروپی و ویژگی حاصلضربی عدد آماری الزام می کند که تابع $f(\Omega)$ به شکل (۱-۲-۶) باشد.

حل:

$$S = f(\Omega) \Rightarrow S_{tot} = \sum_i S_i = \sum_i f_i(\Omega_i)$$

$$\Omega_{tot} = \prod_i \Omega_i \Rightarrow \sum_i f_i(\Omega_i) = f\left(\prod_i \Omega_i\right) \Rightarrow$$

$$f(\Omega_1\Omega_2 000) = f_1(\Omega_1) + f_2(\Omega_2) + 000 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} df = \dfrac{\partial f}{\partial\Omega} d\Omega \\ d\Omega = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\Omega_1} d\Omega_1 + \dfrac{\partial\Omega}{\partial\Omega_2} d\Omega_2 + 000 \end{cases}$$

$$df=\frac{\partial f}{\partial \Omega}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega_1}d\Omega_1+000\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial \Omega}\left(\frac{\Omega}{\Omega_1}d\Omega_1+000\right)=\frac{\partial f}{\partial \Omega}\Omega\left(\frac{d\Omega_1}{\Omega_1}+\frac{d\Omega_2}{\Omega_2}+000\right)$$
(١)

$$f(\Omega)=f_1(\Omega_1)+f_2(\Omega_2)+000 \Rightarrow df=\frac{\partial f_1}{\partial \Omega_1}d\Omega_1+\frac{\partial f_2}{\partial \Omega_2}d\Omega_2+000$$
(٢)

$$(1),(2) \Rightarrow \Omega\frac{\partial f}{\partial \Omega}=\Omega_1\frac{\partial f_1}{\partial \Omega_1}=\Omega_2\frac{\partial f_2}{\partial \Omega_2}=000=cte$$

$$df=C\frac{d\Omega}{\Omega} \Rightarrow f(\Omega)=k\ln\Omega$$

۱-۳ دوسیستم B,A دارای ترکیباتی یکسان هستند. آنها را با هم تماس می دهیم بصورتیکه تبادل انرژی و ذرات با هم داشته باشند ولی حجم V_A, V_B آنها ثابت باقی بماند، نشان دهید مینیمم مقدار کمیت $\left(\frac{dE_A}{dN_A}\right)$ به وسیله عبارت $\frac{\mu_A T_B-\mu_B T_A}{T_B-T_A}$ داده می شود که درآن T,μ به ترتیب پتانسیل شیمیایی و دما هستند.

حل:

$$\Delta S\geq \circ \Rightarrow \Delta S_A+\Delta S_B\geq \circ$$

$$S = S\left(E, V, N\right) \Rightarrow dS = \frac{\partial S}{\partial E}dE + \frac{\partial S}{\partial V}dV + \frac{\partial S}{\partial N}dN$$

$$V = Const \Rightarrow dV = \circ$$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E}dE + \frac{\partial S}{\partial N}dN \quad \Rightarrow$$

$$\Delta S_A + \Delta S_B = \left.\frac{\partial S_A}{\partial E_A}\right|_{N,V} dE_A + \left.\frac{\partial S_A}{\partial N_A}\right|_{E,V} dN_A$$

$$+ \left.\frac{\partial S_B}{\partial E_B}\right|_{N,V} dE_B + \left.\frac{\partial S_B}{\partial N_B}\right|_{E,V} dN_B$$

$$dE = TdS - PdV + \mu dN$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} = \frac{1}{T}$$
(۱)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V} = -\frac{\mu}{T}$$
(۲)

$$N_A + N_B = N = Const \Rightarrow dN_A + dN_B = \circ \Rightarrow dN_A = -dN_B$$
(۳)

$$E_A + E_B = E = Const \Rightarrow dE_A + dE_B = \circ \Rightarrow dE_A = -dE_B$$
(۴)

با توجه به روابط ۱ تا ۴ داریم :

$$\Delta S_A+\Delta S_B=\frac{1}{T_A}dE_A-\frac{\mu_A}{T_A}dN_A+\frac{1}{T_B}dE_B-\frac{\mu_B}{T_B}dN_B$$

$$=\frac{1}{T_A}dE_A-\frac{1}{T_B}dE_A-\frac{\mu_A}{T_A}dN_A+\frac{\mu_B}{T_B}dN_A$$

$$=\left(\frac{1}{T_A}-\frac{1}{T_B}\right)dE_A+\left(\frac{\mu_B}{T_B}-\frac{\mu_A}{T_A}\right)dN_A\geq \circ$$

$$\frac{dE_A}{dN_A}\geq\frac{T_B\mu_A-T_A\mu_B}{T_B-T_A}\ \Rightarrow\ \left(\frac{dE_A}{dN_A}\right)_{\min}=\frac{T_B\mu_A-T_A\mu_B}{T_B-T_A}$$

۴-۱ در یک گاز کلاسیکی متشکل از کره های صلب (به قطر σ) توزیع فضایی ذرات به هم وابسته نیستند بطور خلاصه وجود N' ذره در سیستم فقط حجم $(V-N'V_\circ)$ را برای $(N'+1)$ ذره باقی می گذارد. واضح است که $V_\circ$ باید متناسب با σ^3 باشد. با فرض اینکه $NV_\circ<<V$ باشد، وابستگی $\Omega\,(N,V,E)$ به V را تعیین کنید و بعنوان یک نتیجه نشان دهید که V در قانون گازها می تواند بوسیله V-b جایگزین شود که b مساوی چهار برابر فضای واقعی اشغال شده بوسیله ذرات است.

حل:

$$If\quad N=1\ \Rightarrow\ \Omega_1\propto V$$

$$If\quad N=2\ \Rightarrow\ \Omega_2\propto V\,(V-u)$$

$$If\quad N=3\ \Rightarrow\ \Omega_3\propto V\,(V-u)(V-2u)$$

$$\vdots$$

$$If\quad N=N\ \Rightarrow\ \Omega_N\propto V\,(V-u)\ldots\ldots(V-(N-1)u)$$

$$\Rightarrow \ \Omega_N \propto V^N\left[\left(1-\frac{u}{V}\right)\left(1-\frac{2u}{V}\right)00000\left(1-\frac{(N-1)u}{V}\right)\right] \ \Rightarrow$$

$$\Omega_N = CV^N\left[\left(1-\frac{u}{V}\right)\left(1-\frac{2u}{V}\right)\dots\right]$$

که در این رابطه C مقداري ثابت مي باشد.

$$\begin{cases} \ln\Omega_N = \ln C + N\ln V + \ln\left(1-\frac{u}{V}\right) + \ln\left(1-\frac{2u}{V}\right) + 000 \\ \qquad = \ln C + N\ln V + \sum_{m=1}^{N-1}\ln\left(1-\frac{mu}{V}\right) \\ \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - 0000 \end{cases}$$

$$S = k\ln\Omega = k\ln C + Nk\ln V - k\frac{u}{V}\sum_{m=1}^{N-1} m$$

$$= k\ln C + Nk\ln V - \frac{N(N-1)}{2}\times k\frac{u}{V}$$

$$\frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,E} = \frac{Nk}{V} + \frac{kN(N-1)u}{2V^2} = \frac{Nk}{V}\left(1+\frac{(N-1)u}{2V}\right)$$

u حجمي است كه به ازاي يك ذره به قطر σ يا به حجم V كم مي شود يا به عبارتي حجم هر كدام از ذرات است.

$$PV = NkT\left(1+\frac{(N-1)u}{2V}\right)$$

براي يك ذره به حجم V احتمال با V متناسب است ولي وقتي ذره وارد مي شود حجمي به اندازه u بدون اشغال باقي مي ماند. در واقع حجم خود ذره به اضافه فضايي كه در اطراف ذرات بدون قابل دسترسي مي‌ماند و اين برابر حجم كره اي به شعاع σ است:

$$u=\frac{4}{3}\pi\sigma^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3\times 8=8V_{\circ}$$

$V_{\circ}$ حجم اشغال شده واقعي به وسيله گلوله اي به شعاع $\frac{\sigma}{2}$ مي باشد.

$$PV=NkT\left(1+\frac{8(N-1)V_{\circ}}{2V}\right)$$

$$N>>1 \Rightarrow PV \simeq NkT\left(1+\frac{4NV_{\circ}}{V}\right)$$

۱-۶ ظرفی استوانه ای با طول ۱ متر و قطر ۰/۱ متر با گازی تک اتمی در فشار ۱ اتمسفر و دمای ۳۰۰ کلوین پر شده است بوسیله تخلیه الکتریکی در طول محور ظرف، به گاز گرما داده می شود.

اگر با این روش یک انرژی 10^4 ژول به گاز داده شود گاز فوراً بعد از تخلیه الکتریکی به چه دمایی می رسد؟

حل:

$$\begin{cases} L=1m \\ R=\frac{0/1}{2}m \end{cases} \qquad \begin{cases} P=1atm \\ T=300\,^{\circ}c \end{cases} \qquad \Delta E=10^4 J$$

$$PV = NkT \Rightarrow Nk = 0/265\, {}^{J}\!/_{{}^{\circ}K} \quad , \quad P = \frac{2}{3}\frac{E}{V} \Rightarrow PV = \frac{2}{3}E$$

$$NkT = \frac{2}{3}E \Rightarrow Nk\Delta T = \frac{2}{3}\Delta E \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}\times 10^4 = 0/265\times\Delta T \Rightarrow T_2 = 28/5^{\circ}K$$

۱-۷ مکانیک ~~آماری گاز فرین نسبیتی که حالت هـای~~ انرژی ذرات ش به صورت زیر است را مطالعه کنید $E(n_x,n_y,n_z)=\frac{hc}{2L}(n_x^2+n_y^2+n_z^2)^{\frac{1}{2}}$. اگر این فرمول را در عبارت (۱-۴-۵) که در بخش ۱-۴ برای گاز غیر نسبیتی بررسی شد جایگزین کنیم، نشان دهید در این حالت نسبت $\frac{C_P}{C_V}$ مساوی $\frac{4}{3}$ است نه $\frac{5}{3}$.

حل:

$$E(n_x,n_y,n_z)=\frac{hc}{2L}(n_x,n_y,n_z)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (n_{1x}^2,n_{1y}^2,n_{1z}^2)^{\frac{1}{2}} = 2L\,\frac{E_1}{hc} \\ (n_{1x}^2,n_{1y}^2,n_{1z}^2)^{\frac{1}{2}} = 2L\,\frac{E_2}{hc} \\ \vdots \\ (n_{Nx}^2,n_{Ny}^2,n_{Nz}^2)^{\frac{1}{2}} = 2L\,\frac{E_N}{hc} \end{cases}$$

$$(n_{1x}^2+n_{1y}^2+n_{1z}^2)^{\frac{1}{2}}+000+(n_{Nx}^2+N_{Ny}^2+N_{Nz}^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{2LE}{hc}$$

$$E=E_1+E_2+E_3+000+E_N$$

معادله بالا معادله صفحه اي است كه نقاط تقاطع آن با محورها بصورت زير است. اين سطح از تمام محورها در نقاط $\frac{2LE}{hc}$ مي گذرد.

$$n_{1x}=\frac{2LE}{hc} \quad n_{1y}=\frac{2LE}{hc}$$

$$\Omega=S_N=C_N\left(\frac{2LE}{hc}\right)^{3N-1}$$

آنتروپي برابر است با: $S=k\ln\Omega$

$$S=k\ln C_N+k(3N-1)\ln\frac{2LE}{hc}$$

$$S-\alpha=k(3N)\ln\frac{2LE}{hc} \quad , \quad \alpha=k\ln C_N$$

كه در اينجا از تقريب $3N-1 \approx 3N$ استفاده كرده ايم.

$$E=\frac{hc}{2L}\exp\left(\frac{S-\alpha}{3kN}\right) \quad , \quad L=V^{\frac{1}{3}}$$

$$E=\frac{hc}{2V^{\frac{1}{3}}}\exp\left(\frac{S-\alpha}{3Nk}\right) \quad T=\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{N,V}=\frac{1}{3Nk}\frac{hc}{2L}\exp\left(\frac{S-\alpha}{3Nk}\right) \quad \Rightarrow$$

$$T=\frac{E}{3Nk} \quad \Rightarrow \quad E=3NkT$$

$$E = 3NkT \quad C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{N,V} = 3Nk$$

$$C_p = \frac{\partial}{\partial T}\left(E + PV\right) \quad , \quad P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{E}{3V} \quad \Rightarrow \quad PV = \frac{E}{3}$$

$$C_p = \frac{\partial}{\partial T}\left(E + \frac{E}{3}\right) = \frac{4}{3}k\,(3N) = 4Nk \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{4}{3}$$

۱-۸ یک سیستم میکروسکوپیک که ویژه مقادیر انرژی آن بوسیله

$$\varepsilon(n) = nh\nu \qquad n = \circ, 1, 2, \cdots$$

داده می شود رادر نظر بگیرید یک عبارت برای عدد Ω سیستم بدست آورید. دمای سیستم را برحسب تابعی از $\frac{E}{N}$ و $h\nu$ تعیین کنید دربارة وضعیت حدی $\frac{E}{Nh\nu} \to \infty$ بحث کنید.

حل:

انرژي ذرة اول:

$$\varepsilon(n_1) = n_1 h\upsilon \qquad n_1 = \circ, 1, 2, \ldots$$

انرژي ذره دوم:

$$\varepsilon(n_2) = n_2 h\upsilon \qquad n_2 = \circ, 1, 2, \ldots$$

انرژي ذره سوم:

$$\varepsilon(n_3) = n_3 h\upsilon \qquad n_3 = \circ, 1, 2, \ldots$$

$$\vdots$$

انرژي ذرة N ام:

$$\varepsilon(n_N) = n_N h\upsilon \qquad n_N = \circ, 1, 2, \ldots$$

بی نهایت تراز داریم و می خواهیم N ذره با انرژی کل E را بین آنها تقسیم کنیم همانند مساله نوسانگر هماهنگ ساده (N تا نوسانگر یکسان با انرژی کل E)

$$E = n(n_1) + n(n_2) + 000 + \varepsilon(n_N) = (n_1 + n_2 + 000 + n_N) h\upsilon = R h\upsilon$$

$$R = \frac{E}{h\upsilon}$$

R تعداد کل بسته هاي انرژي $h\upsilon$.

حال مي خواهیم ببینیم با چند روش مي توان R بسته انرژي یکسان را بین N ذره تقسیم کرد چون Rها یکسان و ذرات نیز یکسان هستند بنابراین:

$$\Omega = \frac{(N+R-1)!}{R!(N-1)!} \quad S = k\ln\Omega = k\left[\ln(N+R-1)! - \ln R! - \ln(N-1)!\right]$$

و چون $N >> 1$ بنابراین $N - 1 \simeq N$.

$$S = k\left[(N+R)\ln(R+N) - R\ln R - N\ln N\right]$$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V} = \frac{\partial S}{\partial R}\cdot\frac{\partial R}{\partial E} = \frac{k}{h\upsilon}\ln\left(\frac{R+N}{R}\right)$$

$$T = \frac{h\upsilon}{k}\cdot\frac{1}{\ln\left(1+\frac{Nh\upsilon}{E}\right)}$$

اگر $\frac{E}{Nh\upsilon}\to\infty$ در این صورت $\frac{Nh\upsilon}{E}\to 0$ و بنابراین $\ln(1+\frac{Nh\upsilon}{E})\to 0$ در نتیجه : $T\to\infty$

۱-۹ از این واقعیت که آنتروپی $S(N,V,E)$ سیستم ترمودینامیکی یک عبارت فزونور است استفاده کنید و ثابت کنید که:

$$N\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,E}+V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,E}+E\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V}=S$$

این عبارت دلالت می کندکه $\frac{(-\mu N+PV+E)}{T}=S$ ویا به عبارت دیگر $N\mu=E+PV-TS$ ، این فرمول یک رابطه مهم و مشهور در ترمودینامیک است.

حل:

مي دانيم پارامتري فزونفر است كه اگر تمام خصوصيات ترمودیناميكي سيستم را α برابر كنيم، آن پارامتر نيز α برابر مي شود.

$$\begin{cases} N\to\alpha N \\ V\to\alpha V \\ E\to\alpha E \end{cases} \Rightarrow (S=\alpha S)\Rightarrow S(\alpha N,\alpha V,\alpha E)=\alpha S(N,V,E)$$

$$dS=\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,E}dN+\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,E}dV+\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V}dE$$

$$dS=\alpha S-S=(\alpha-1)S \quad , \quad dN=(\alpha-1)N$$

$$dV=(\alpha-1)V \quad \Rightarrow \quad dE=(\alpha-1)E$$

$$(\alpha-1)S=(\alpha-1)N\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)+(\alpha-1)V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)+(\alpha-1)E\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)$$

$$N\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,E}+V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N}+E\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V}=S \quad \Rightarrow$$

$$-N\frac{\mu}{T}+V\frac{P}{T}+E\frac{1}{T}=S \Rightarrow PV+E-TS=N\mu$$

۱۰-۱ یک مول آرگون و یک مول هلیوم در ظرفی با حجم مساوی قرار گرفته اند. اگر دمای آرگون $300k$ باشد، دمای هلیوم چقدر باید باشد تا آنتروپی هر دو گار یکسان باشد؟

حل:

$$\text{آرگون} : \begin{cases} m_2=40\ ,V_2\ ,\ N_2=6/02\times10^{23}\ ,\ T_2=300^\circ k \\ E_2=\dfrac{3}{2}N_2kT_2 \end{cases}$$

$$\text{هلیم} : \begin{cases} m_1=4\ ,\ V_1\ ,\ N_1=6/02\times10^{23} \\ E_1=\dfrac{3}{2}N_1kT_1 \end{cases} \Rightarrow\ S_1=S_2$$

$$N_1k\ \ln\left[\frac{V_1}{h^3}\left(\frac{4\pi m_1E_1}{3N_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\frac{3}{2}N_1k=N_2k\ \ln\left[\frac{V_2}{h^3}\left(\frac{4\pi m_2E_2}{3N_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\frac{3}{2}N_2k$$

زیرا:

$$N_1=N_2,V_1=V_2\ \Rightarrow\ m_1E_1=m_2E_2\ \Rightarrow\ m_1\times\frac{3}{2}N_1kT_1=m_2\times\frac{3}{2}N_2kT_2$$

$$m_1T_1=m_2T_2\ \Rightarrow\ 4T_1=40\times300\ \Rightarrow\ T_1=3000^\circ k$$

۱۱-۱ چهار مول نیتروژن و یک مول اکسیژن در فشار ۱ اتمسفر و دمای300 کلوین با هم مخلوط شده و به شکل هوایی درآمده اند که دارای فشار و دمای یکسان اند. آنتروپی بر مول مخلوط را حساب کنید ؟

حل:

چون فشار و دماي هر دو گاز اوليه و گاز مخلوط يكسان است پس حجم نمي تواند ثابت باشد.

$$V=V_1+V_2 \Rightarrow \frac{nRT}{P}=\frac{n_1RT}{P}+\frac{n_2RT}{P} \ , \ (n=n_1+n_2)$$

$$S_T=\sum_{i=1}^{2}N_iR\ln\frac{V}{V_i}+\frac{3}{2}N_ik\left\{1+\ln\frac{2\pi n_iT}{h^2}\right\} \ , \ N_i=n_iN_0 \ \Rightarrow \begin{cases} N_1=4N_0 \\ N_2=N_0 \end{cases}$$

$$V=\frac{nRT}{P}\cong 1/23\times 10^{-5} \ \Rightarrow \ \frac{V}{N_1}=\frac{V}{4N_2}=\frac{1/23\times 10^{-15}}{4\times 6/02\times 10^{23}}=5/1\times 10^{-3}$$

$$N_0m_1=14 \ , \ m_2=?$$

$$\frac{V}{N_2}=4\frac{V}{N_0}=20/4\times 10^{-3}-\begin{cases}\dfrac{2\pi m_1T}{h^2}=\dfrac{2\times 3/14\times 14\times 300\times 10^{-3}}{\left(6/63\times 10^{-34}\right)^2} \\ \dfrac{2\pi m_2T}{h^2}=\dfrac{16\times 300\times 10^{-3}}{2\times 3/14\times\left(1/055\times 10^{-34}\right)^2}\end{cases}$$

۱۲-۱ نشان دهيد كه تغييرات آنتروپى مخلوط كه در (۱-۵) استخراج شده، روابط زير را ارضاء مى كند.

(الف) براى هر V_2, N_2, V_1, N_1 كميت $(\Delta S)_{1\equiv 2}\geq 0$ ثابت مى ماند وقتى $\frac{N_1}{V_1}=\frac{N_2}{V_2}$.

(ب) براى هر V_2, N_2, V_1, N_1، كميت $(\Delta S)-(\Delta S)_{1\equiv 2}=(\Delta S)^*\geq 0$ ثابت است، اگر فقط N_1 يا N_2 صفر باشد.

(ج) برای مقدار (N_1+N_2) داده شده، کمیت $(\Delta S)^* \leq (N_1+N_2)k\ln 2$ ثابت می ماند وقتی که $N_1=N_2$ باشد.

حل:

$$(\Delta S)_{1\equiv 2}=k\left[(N_1+N_2)\ln\frac{V_1+V_2}{N_1+N_2}-N_1\ln\frac{V_1}{N_1}-N_2\ln\frac{V_2}{N_2}\right]$$

$$=k\left[(N_1+N_2)\ln\frac{V_1+V_2}{N_1+N_2}+N_1\ln N_1+N_2\ln N_2-N_1\ln V_1-N_2\ln V_2\right]$$

$$(\Delta S)_{1\equiv 2}=k\left\{N_1\ln\left(\frac{V_1+V_2}{N_1+N_2}\right)\frac{N_1}{V_1}+N_2\ln\left(\frac{V_1+V_2}{N_1+N_2}\right)\frac{N_2}{V_2}\right\}$$

$$V_2=mV_1 \quad , \quad N_2=nN_1 \qquad \frac{N_2}{V_2}=\frac{n}{m}\frac{N_1}{V_1}$$

اگر فرض کنیم که همواره $n\geq m$ درست باشد آنگاه داریم:

$$(\Delta S)_{1\equiv 2}=k\left\{N_1\ln\left(\frac{(1+m)V_1}{(1+n)N_1}\cdot\frac{N_1}{V_1}\right)+N_2\ln\left(\frac{1+m}{1+n}\cdot\frac{n}{m}\right)\right\}$$

$$(\Delta S)_{1\equiv 2}=k\,(N_1+N_2)\ln\frac{1+m}{1+n}+k\,N_2 ln\,\frac{n}{m}$$

ب)

$$\Delta S-(\Delta S)_{1\equiv 2}=(\Delta S)^*=k\left[\ln\left(\frac{N_1+N_2}{N_1}\right)+N_2\ln\frac{N_1+N_2}{N_1}\right]\geq \circ$$

که واضح مي باشد.

$$(\Delta S)^*=k\left[N_1\ln\frac{N_1+N_2}{N_1}+N_2\ln\frac{N_1+N_2}{N_2}\right]$$

ج) مي خواهيم ثابت کنيم که:

$$N_1 \ln\frac{N}{N_1}+N_2\ln\frac{N}{N_2}\le (N_1+N_2)\ln 2$$

$$\frac{N_1}{N}\ln\frac{N}{N_1}+\frac{N_2}{N}\ln\frac{N}{N_2}\le \ln 2$$

اگر $N=mN_1$ باشد. آنگاه داریم:

$$mN_1=N_1+N_2 \;\Rightarrow\; N_2=(m-1)N_1$$

$$\frac{1}{m}\ln m+\frac{(m-1)}{m}\ln\frac{m}{m-1}\le \ln 2$$

$$\frac{1}{m}\ln m-\frac{1}{m}\ln m+\frac{1}{m}\ln(m-1)+\ln\frac{m}{m-1}\le \ln 2$$

$$\ln(\frac{m}{m-1})(m-1)^{\frac{1}{m}}\le \ln 2$$

$$(\frac{m}{m-1})(m-1)^{\frac{1}{m}}\le \ln 2$$

$$\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}\le 2^m$$

به ازاي $m=2$ برقرار است.

از روش استقراء فرض مي کنیم که به ازاي $m=k$ برقرار است. بنابراین باید به ازاي $k+1$ نیز برقرار باشد.

$$\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\le 2^k \;\Rightarrow\; \frac{(k+1)^{k+1}}{(k)^k}\le 2^{k+1}$$

که به ازاء $k>2$ همواره برقرار است.

۱-۱۳ اگر دو گاز بصورت فرآیندی که در بخش (۵-۱) ذکر شده با هم مخلوط شوند در صورتی که دمای ابتدایی آنها مختلف بوده و برابر T_1 و T_2 باشد. آنتروپی مخلوط در این حالت

چه مقدار خواهد بود؟ آيا سهم ناشي از اين تركيب با تغيير نوع دو گاز، تغيير خواهد كرد؟

حل:

$$\Delta S = S_T - \left(S_1 + S_2\right)$$

S_T آنتروپي مخلوط مي باشد.

$$S_i = N_i k \ln V_i + \frac{3}{2} N_i k \left\{1 + \ln\left(\frac{2\pi m_i k T_i}{h^2}\right)\right\} \quad : i = 1,2$$

$$S_T = \sum_{i=1}^{2} N_i k \ln V + \frac{3}{2} N_i k \left\{1 + \ln\left(\frac{2\pi m k T_i}{h^2}\right)\right\}$$

$$\Delta S = \left\{N_1 k \ln V + N_2 k \ln V + \frac{3}{2} N_1 k + \frac{3}{2} N_2 k + \frac{3}{2} N_1 k \ln\left(\frac{2\pi m_1 k T}{h^2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} N_2 k \ln\left(\frac{2\pi m_2 k T}{h^2}\right)\right\} - \left\{N_1 k \ln V_1 + N_2 k \ln V_2 + \frac{3}{2} N_1 k + \frac{3}{2} N_2 k \right. :$$

$$\left. + \frac{3}{2} N_1 k \ln\left(\frac{2\pi m_1 k T_1}{h^2}\right) + \frac{3}{2} N_2 k \ln\left(\frac{2\pi m_2 k T_2}{h^2}\right)\right\}$$

$$\Delta S = k \left\{N_1 \ln \frac{V_1 - V_2}{V_1} + N_2 \ln \frac{V_1 - V_2}{V_2} + \frac{3}{2} N_1 k \ln \frac{T}{T_1} + \frac{3}{2} N_2 k \ln \frac{T}{T_2}\right\}$$

تغيير آنتروپي به جرم و نوع گاز بستگي ندارد و فقط به دماي دو نوع گاز بستگي دارد.

$$PV = NkT \Rightarrow \begin{cases} P_1 V_1 = N_1 k T_1 \\ P_2 V_2 = N_2 k T_2 \end{cases}$$

$$P_1V_1+P_2V_2=PV \quad \Rightarrow \quad N_1kT_1+N_2kT_2=NkT \quad \Rightarrow$$

$$T=\frac{N_1T_1+N_2T_2}{N} \quad , \quad N=N_1+N_2$$

۱-۱۴ ثابت کنید برای یک گاز ایده آل که از مولکولهای تک اتمی تشکیل شده، تغییر آنتروپی بین هر دو دما، وقتی فشار ثابت است، $\frac{5}{3}$ برابر مقدار تغییر آنتروپی حالتی است که حجم ثابت باشد این نتیجه را به صورت عددی بوسیله محاسبه حجم برمول $(\Delta S)_P$ و $(\Delta S)_V$ یک گاز ایده ال، وقتی دما از ۳۰۰ کلوین به ۴۰۰ کلوین افزایش می یابد، را بررسي كنيد.

حل:

$$dS=\frac{\cancel{d}Q}{dT} \quad \text{یا} \quad \Delta S=\int\frac{\cancel{d}Q}{T}=\int\frac{PdV+du}{T}$$

چون گاز تك اتمي است $du=nC_P\,dT$ يعني اتم فقط حركت انتقالي دارد.

اگر دو اتمي باشد. $du=\frac{5}{2}nRdT$

$$du=\frac{3}{2}nRdT$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\Delta S)_V=\int\frac{du}{T}=\int_{t_i}^{t_f}nC_V\frac{dT}{T}=nC_V\ln\frac{T_f}{T_i}\\[2ex](\Delta S)_P=\int\frac{du}{T}=\int_{t_i}^{t_f}nC_p\frac{dT}{T}=nC_P\ln\frac{T_f}{T_i}\end{array}\right. \Rightarrow \frac{(\Delta S)_P}{(\Delta S)_V}=\frac{nC_P}{nC_V}=\frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} (\Delta S)_P = 1 \times \frac{5}{2} R \ln \frac{400}{300} = \frac{5}{2} R \ln \frac{4}{3} \\ (\Delta S)_V = 1 \times \frac{3}{2} R \ln \frac{400}{30} = \frac{3}{2} R \ln \frac{4}{3} \end{cases}$$

۱-۱۵ رابطه $P-V$ در یک فرآیند بی دررو بوسیله تابع نمایی $PV^{\gamma} = \text{const}$ داده می شود. یک مخلوط گاز ایده ال به ترتیب با کسر های مولي f_1 و f_2 و توان هاي γ_1, γ_2 در نظر بگیرید و نشان دهید توانها ي γ برای مخلوط بوسیله $\frac{1}{\gamma-1} = \frac{f_1}{\gamma_1-1} + \frac{f_2}{\gamma_1-1}$ داده می شود.

حل:

$\cancel{d}Q = 0$ یا $dS' = 0$, $PV^{\gamma} = cte$, $f_1 + f_2 = 1$

f_1 و f_2 کسر مولي و n_1 تعداد مولکول گرم هاي گاز (۱)
و n_2 تعداد مولکول گرم گاز (۲)

$$\Delta S' = \int_{t_i}^{t_f} n_1 C_{V_1} \frac{dT}{T} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{n_1 R T_1}{V_1} dV + \int_{t_i}^{t_f} n_1 C_{V_1} \frac{dT}{T} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{n_2 R T_2}{V_2} dV = 0$$

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{u + PdV}{T} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(n_1 C_{V_1} + n_2 C_{V_2}\right)}_{A} \ln \frac{T_f}{T_i} + \underbrace{\left(n_1 R + n_2 R\right)}_{B} \ln \frac{V_f}{V_i} = 0$$

$$\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^B + \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)^A = \ln 1 \;\Rightarrow$$

$$\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^B \left(\frac{T_f}{T_i}\right)^A = 1 \;\Rightarrow\; V_f^{\,B} T_f^{\,A} = V_i^{\,B} T_i^{\,A}$$

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\left(\frac{A}{B}\right)^{-1}} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\left(\frac{B}{A}\right)} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\left(\frac{n_1R+n_2R}{nC_{V_1}+n_2C_{V_2}}\right)}$$

$$V^{\gamma-1}T = cte \quad , \quad PV^{\gamma} = cte \quad , \quad PV = NkT$$

$$\frac{n_1R+n_2R}{nC_{V_1}+n_2C_{V_2}} = \gamma_1 - 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\gamma_1-1} = \frac{nC_{V_1}+n_2C_{V_2}}{n_1R+n_2R}$$

$$\frac{1}{\gamma-1} = \frac{n_1}{\underbrace{n_1+n_2}_{f_1}} \times \frac{C_{V_1}}{R} + \frac{n_2}{\underbrace{n_1+n_2}_{f_2}} \times \frac{C_{V_2}}{R} = f_1\frac{C_{V_1}}{C_{P_1}+C_{V_1}} + f_2\frac{C_{V_2}}{C_{P_2}+C_{V_1}}$$

$$= \frac{f_1}{\frac{C_{P_1}}{C_{V_1}}-1} + \frac{f_2}{\frac{C_{P_2}}{C_{V_2}}-1} = \frac{f_1}{\gamma_1-1} + \frac{f_2}{\gamma_2-1}$$

۱-۱۶ فرمولهای ترمودینامیکی $S = V\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\mu$ و $N = V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ را ثابت کرده و آنها را در مورد گاز ایده آل کلاسیکی بررسي کنید.

حل:

$$G = E - TS + PV = \mu N \quad \Rightarrow$$

$$dE - TdS - SdT + PdV + VdP = \mu dN + Nd\mu$$

$$dE = TdS - PdV + \mu dN \quad \Rightarrow \quad VdP = SdT + Nd\mu$$
(۱)

dP را وقتي كه P تابعي از μ و T باشد به دست مي آوريم.

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mu} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T} d\mu$$
(۲)

(۲) را در V ضرب مي كنيم و در معادله (۱) قرار مي دهيم.

$$V\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mu} dT + V\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T} d\mu = SdT + Nd\mu \quad \Rightarrow$$

$$S = V\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mu}$$

$$N = V\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T}$$

فصل 2

۲-۱ نشان دهید که المان حجم فضاي فاز:

$$d\omega=\prod_{i=1}^{3N}(dq_i dp_i)$$

تحت تبدیلات کانوني یك مجموعه از مختصات (q,p) به یك مجموعه دیگر از مختصات (Q,p) ثابت باقي مي ماند.
(راهنمائي: قبل از در نظر گرفتن این نوع از تبدیلات که بعنوان تبدیلات پیوسته شناخته مي شوند. این ممکن است براي در نظر گرفتن تبدیلات نقطه اي که مختصه ي جدید Q_i و مختصه ي قدیم q_i در بین خودشان تبدیل مي شوند مفید باشد.

حل:

ميخواهیم ثابت کنیم که المان حجم فضاي فاز تحت تبدیلات کانونیك ناوردا است.

اگر (q_i,p_i) مختصات کانوني باشند آنگاه داریم:

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

(۱)

تبدیلي را کانونیك گوئیم که مجموعه (q_i,p_i) را به مجموعه جدید (Q_i,P_i) تبدیل کند بدون آنکه معادلا ت (۱) یا همان

معادلات كانونيك نقض شود يعني (Q_i,P_i) هم در معادلات مشابه صدق كنند.

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dot{p}_j=\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial Q_i}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

وارون اين تبديلات نيز بايد وجود داشته باشد.

$$q_j=q_j(Q,P)$$

$$p_j=p_j(Q,P)$$

تبديلات كانونيك وقتي به دست مي آيد كه:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial P_i}=\dfrac{\partial H}{\partial p_j}\dfrac{\partial p_j}{\partial P_i}+\dfrac{\partial H}{\partial q_j}\dfrac{\partial q_j}{\partial P_j}\\[2ex] \dot{Q}_i=\dfrac{\partial H}{\partial P_i}\Rightarrow\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j}=\dfrac{\partial p_j}{\partial P_i}\,,\,\dfrac{\partial Q_i}{\partial p_i}=-\dfrac{\partial q_j}{\partial P_i}\end{cases}$$

به همين ترتيب براي $\dot{p}_i$ و $-\dfrac{\partial H}{\partial Q_i}$ داريم:

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j}=-\frac{\partial P_j}{\partial Q_i}\quad,\quad\frac{\partial P_i}{\partial p_j}=\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

حال روابط زير را معرفي مي كنيم.

$$\eta_i=q_i\quad,\quad\eta_{i+3m}=p_i\quad,\quad i\le 3m$$

$$\frac{\partial H}{\partial\eta_i}=\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad,\quad\left(\frac{\partial H}{\partial\eta}\right)_{i+3m}=\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{q}_{3N} \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{3N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_{3N}} \end{pmatrix}$$

$\overline{\overline{J}}$ مـاتـریـس $6N \times 6N$ بـعـدي است.

$$\overline{\overline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{3N}^{3N} \quad , \qquad \eta = \overline{\overline{J}} \frac{\partial H}{\partial \eta}$$

$$\overline{\overline{J}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -11_{6N \times 6N}$$

$$\tilde{\overline{\overline{J}}}\,\overline{\overline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 11$$

$$\tilde{\overline{\overline{J}}} = -\overline{\overline{J}} = \overline{\overline{J}}^{-1}$$

و $\det(\overline{\overline{J}} = 1)$.

$$\begin{cases} \eta_{i=1,2,\ldots,6N} = \left(q_1, \ldots, q_{3N}, p_1, \ldots, p_{3N}\right) \\ \xi_{i=1,1,\ldots,6N} = \left(Q_1, \ldots, Q_{3N}, P_1, \ldots, P_{3N}\right) \end{cases}$$

$$\xi_i = \xi_i(\eta_i) \Rightarrow \dot{\xi}_i = \frac{\partial \xi}{\partial \eta_i}\dot{\eta}_j \quad , \quad i, j = 1, \ldots, 6N$$

M ژاكوبي تبديل مي باشد.

$$\dot{\xi} = \overline{\overline{M}}\,\dot{\eta}$$

$$M_{i,j} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} \quad , \quad M_{i,j} = \left(\tilde{M}\right)_{i,j} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}$$

$$\dot{\xi} = \overline{\overline{M}}\,\overline{\overline{J}}\,\frac{\partial H}{\partial \eta} \qquad , \qquad \frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \tilde{M}\,\frac{\partial H}{\partial \xi} \qquad , \qquad \dot{\xi} = \overline{\overline{M}}\,\overline{\overline{J}}\,\overline{\overline{\tilde{M}}}\,\frac{\partial H}{\partial \xi}$$

اين تبديل وقتي كانونيك است كه:

$$\overline{\overline{M}}\,\overline{\overline{J}}\,\overline{\overline{\tilde{M}}} = \overline{\overline{J}}$$

$$\begin{cases} d\omega = dq_1 \ldots dq_{3N}\, dp_1 \ldots dp_{3N} = \prod_{i=1}^{6N} d\eta_i \\ d\omega^1 = dQ_1 \ldots dQ_{3N}\, dP_1 \ldots dP_{3N} = \prod_{i=1}^{6N} d\xi_i \end{cases}$$

بايد $\eta = M\xi$ بنابراين:

$$d\omega^1 = \left|\det M\right| d\omega$$

از طرفي $MJ\tilde{M} = J$ پس:

$$\left(\det M\right)^2 \det J = \det J$$

$$\Rightarrow \det M = \pm 1 \rightarrow \left|\det M\right| = 1$$

يعني تحت تبديل تغيير نمي‌كند. به عنوان مثال تبديل نقطه اي را در نظر مي‌گيريم:

تبديل نقطه اي يعني:

$q_2 \to Q_2 \ , \quad q_1 \to Q_1$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = q_i\left(Q\right) \\ Q_i = Q_i\left(q\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \circ \quad , \quad \frac{\partial P_j}{\partial Q_i} = \circ \quad , \quad P_i = P_i\left(p\right)$$

$$\prod_{i=1}^{3N} dq_i \, dp_i = \prod_{i=1}^{3N} \left(\det \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} & \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \\ \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} & \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \end{vmatrix} \right) dQ_i \, dP_j$$

$$= \prod_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \right) dQ_j \, dP_j$$

از طرفي داريم:

$$\frac{\partial p_j}{\partial P_i} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{1}{\left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \right)}$$

$$\prod_{i=1}^{3N} dq_i \, dp_i = \prod_{i=1}^{3N} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \times \frac{1}{\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right)} dQ_j \, dP_j \quad \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{3N} dq_i\, dp_i = \prod_{j=1}^{3N} dQ_j\, dP_j$$

۳-۲ با شروع از خطوط صفر انرژي و كار در فضاي فاز دو بعدي چرخنده هاي كلاسيكي خطوط انرژي كه فضاي فاز را به سلولهايي با حجم h تقسيم مي كند را ترسيم كنيد. انرژي اين حالت ها را محاسبه كنيد و آنها را با ويژه مقادير چرخنده هاي مكانيك كوانتومي مقايسه كنيد.

حل:

$$H = \frac{L^2}{2I} \quad \Rightarrow E = \frac{L^2}{2I} \quad \Rightarrow L = \pm\sqrt{2IE}$$

از لحاظ كلاسيكي داريم

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_\circ} = \frac{\omega}{h}$$

ωحجم فضاي فاز و $\omega_\circ$ المان حجم فضاي فاز است.

$$\omega = \iint dl\, d\theta = \int_{-\sqrt{2IE}}^{\sqrt{2IE}} dl \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 4\pi\sqrt{2IE}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_\circ} = \frac{4\pi\sqrt{2IE}}{\hbar} \quad \Rightarrow E = \frac{\Omega^2\hbar^2}{8I} \qquad (۱)$$

از لحاظ كوانتمي داريم:

$$E = \frac{L^2}{2I} = \frac{l\left(l+1\right)\hbar^2}{2I} \qquad (۲)$$

از مقايسه (۱) و (۲) داريم:

$$l\left(l+1\right) = \frac{\Omega^2}{4}$$

در اينجا نشان مي دهيم $\omega_\circ = h$.

تعداد حالتهاي موجود در يك بازه انرژي بصورت زير است.

$$\Gamma=\frac{\Delta_l}{\frac{\hbar^2 l}{I}}=\frac{\Delta_l I}{\hbar^2 l} \quad \Delta_l=E_l-E_{l-1}=\frac{\hbar^2}{2I}\left[l(l+1)-l(l-1)\right]=\frac{\hbar^2 l}{I}$$

تعداد میکرو حالت‌ها برابر است با:

$$H=\frac{L^2}{2I} \quad \Rightarrow E=\frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}$$

از طرفي حجم فضاي فاز را براي $E-\frac{\Delta}{2}\le H\le E+\frac{\Delta}{2}$ مي‌توان بصورت زير حساب کرد.

$$E-\frac{\Delta}{2}\le\frac{L^2}{2I}\le E+\frac{\Delta}{2}$$

$$2I\left(E-\frac{\Delta}{2}\right)\le L^2\le 2I\left(E+\frac{\Delta}{2}\right)$$

$$\omega=\int_{L_1}^{L_2}dl\int_{-\pi}^{\pi}d\theta=2\pi\left(L_2-L_1\right)=2\pi\left\{\sqrt{2I\left(E+\frac{\Delta}{2}\right)}-\sqrt{2I\left(E-\frac{\Delta}{2}\right)}\right\}$$

$$\omega=2\pi\sqrt{2IE}\left[\left(1+\frac{\Delta}{2E}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{\Delta}{2E}\right)^{1/2}\right] \qquad \Delta<<E$$

$$\omega=2\pi\sqrt{2IE}\left(\frac{\Delta}{2E}\right)=2\pi\Delta\sqrt{\frac{I}{2E}}=2\pi\Delta\sqrt{\frac{I}{\frac{l(l+1)\hbar^2}{I}}}$$

در حد کلاسیک $l\to\infty$ داریم.

$$\omega=\frac{2\pi\Delta I}{l}$$

$$\omega_\circ=\frac{\omega}{\Gamma}=\frac{\frac{2\pi I\Delta}{l\hbar}}{\frac{l\hbar^2}{I\Delta}}=2\pi\hbar=h$$

۴-۲ بوسیله ارزیابي حجم ناحیه مربوط به فضاي فاز نشان دهید که تعداد میکرو حالت هاي قابل دسترس یك چرخنده سه بعدي سخت با تکانه زاویه اي $M \geq$ برابر با $(\frac{M}{\hbar})^2$ مي باشد. سپس تعداد میکرو حالت هایي که ممکن است وابسته به تکانه زاویه اي کوانتومي $M_j = \sqrt{j(j+1)}\hbar$ که $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ یا $j = 0, 1, 2, \ldots$ مي باشد را تعیین کنید نتایج را از نظر فیزیکي توجیه کنید. راهنمایي : براي سادگي متغیر هاي را θ و φ با $M^2 = P_\theta^2 + \frac{P_\varphi^2}{\sin^2\theta}$ در نظر بگیرید.

حل:

این مساله را مي‌توان در مختصات کروي حل کرد.

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 + V_\varphi^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 \quad , \quad \dot{r} = 0$$

$$M = L = I\omega$$

$$V^2 = r^2\omega^2 \quad \Rightarrow \quad M^2 = L^2 = I^2\omega^2 = I^2\left(\frac{p_\theta^2}{I^2} + \frac{p_\varphi^2}{I^2\sin^2\theta}\right)$$

$$M^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_\theta^2}{M^2} + \frac{p_\varphi^2}{M^2\sin^2\theta} = 1$$

فضاي فاز ما چهار بعدي است زیرا دو درجه آزادي داریم. مختصات را با θ و φ و تکانه ها را با p_θ و p_φ نشان مي دهیم. هامیلتوني سیستم را مي توان به صورت زیر نوشت:

$$H = \frac{1}{2}I\omega^2 = L$$

$$H = \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=I\dot{\theta} \;\Rightarrow\; \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{I}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=I\dot{\varphi}\sin^2\theta \;\Rightarrow\; \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{I\sin^2\theta}$$

$$H=\frac{1}{2}I\left(\frac{p_\theta^2}{I^2}+\frac{p_\varphi^2}{I^2\sin^2\theta}\right)$$

براي حجم فضاي فاز داريم:

$$\omega=\frac{1}{h^2}\int_\circ^\pi d\theta\int_\circ^{2\pi}d\varphi\int dp_\theta dp_\varphi$$

$$\int dp_\theta dp_\varphi=\pi M\left(M\sin\theta\right)$$

كه برابر با مساحت بيضي مي باشد.

$$\omega=\frac{2\pi^2}{h^2}\int_\circ^\pi M\left(M\sin\theta\right)d\theta=\frac{2\pi^2}{h^2}M^2\times 2=\left(\frac{M}{\hbar}\right)^2$$

$$M_j=\sqrt{j\left(j+1\right)}\hbar$$

به ازاي هر j ، $2j+1$ حالت وجود دارد.

$$A=\sum_{j=-M}^{j=M}\left(2j+1\right)=1+2+\ldots\ldots+M$$

۲-۶ مختصات عمومي يك نوسانگر هماهنگ ساده بصورت جابجايي زاويه اي θ و تكانه زاويه اي $ml^2\dot{\theta}$ مي باشند بصورت رياضي و ترسيمي مسيرهاي متناظر را در فضاي فاز بررسي كنيد. و نشان دهيد كه مساحت A كه بوسيله مسير محدود شده است بطور دقيق برابر با حاصل ضرب انرژي كل E و زمان نوسان آونگ T مي باشد.

حل:

$$T=\frac{1}{2}mgl^2\dot{\theta}^2$$

$$V=mgh=mgl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mgl\theta^2 \qquad \theta<<1$$

$$E=L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2=\cos t$$

$$P_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \dot{\theta}=\frac{P_\theta}{ml^2}$$

$$q_\theta=\theta$$

$$E=\frac{P_\theta^2}{2ml^2}+\frac{1}{2}mgl\theta^2$$

$$\frac{P_\theta^2}{2ml^2E}+\frac{\theta^2}{\frac{2E}{mgl}}=1$$

و این رابطه معادله یك بیضي مي باشد با قطر بزرگ a و قطر كوچك b كه بصورت زيرتعريف مي شوند.

$$a=\sqrt{2mEl^2}$$

$$b=\sqrt{\frac{2E}{mgl}}$$

بنابراين مساحت بيضي برابر است با:

$$S=\pi ab=\pi\left(2mEl^2\right)^{1/2}\left(\frac{2E}{mgl}\right)^{1/2}=2\pi E\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$S=ET \quad , T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

۲-۷ الف - يك بيان تقريبي براي تعداد راههايي كه مي توان انرژي معين E را بين N نوسانگر هماهنگ يك بعدي توزيع كرد بدست آوريد. ويژه مقادير انرژي نوسانگر هماهنگ بصورت زير مي باشند.

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n = \circ, 1, 2, \cdots$$

ب - هم چنين يك رابطه براي حجم متناظر از ناحيه مربوط به اين سيستم در فضاي فاز بدست آوريد. يك رابطه بين اين دو نتيجه بدست آوريد و نشان دهيد كه فاكتور تبديل $\omega_\circ$ بصورت دقيق برابر با h^N مي باشد.

حل: الف

انرژي نوسانگر اول:

$$E_1 = (n_1 + 1/2)\hbar\omega$$

انرژي نوسانگر دوم:

$$E_2 = (n_2 + 1/2)\hbar\omega$$

انرژي نوسانگر N ام:

$$E_N = \left(n_N + 1/2\right)\hbar\omega$$

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_N = E = \left(n_1 + n_2 + \cdots + n_N\right)\hbar\omega + \frac{N}{2}\hbar\omega$$

$$\left(n_1 + n_2 + \cdots + n_N\right) = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}$$

$$R = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}$$

R تعداد بسته هاي كل انرژي $\hbar\omega$ مي باشد. مسله مانند قرار دادن R توپ يكسان در N جعبه غير مشابه (تميز پذير) مي باشد.

بنابر اين تعداد كل حالت هاي قابل دسترس عبارتند از:

$$\Omega=\frac{(R+N-1)!}{R!(N-1)!}$$

اگر $\frac{E}{N}>>\hbar\omega$ و R>>N باشد در این صورت داریم.

$$\Omega=\frac{R^{N-1}}{(N-1)!}$$

$$R\approx\frac{E}{\hbar\omega}\quad\Rightarrow\quad\Omega=\frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^{N-1}}{(N-1)!}$$

ب- حال حجم فضاي فاز نوسانگرN تك بعدي را محاسبه مي کنیم.

$$\int\ldots\ldots\int d^nq\,d^np=\left[\frac{2\pi}{\omega}\left(E+\frac{1}{2}\Delta\right)\right]^N-\left[\frac{2\pi}{\omega}\left(E-\frac{1}{2}\Delta\right)\right]^N$$

$$E-\frac{1}{2}\Delta<<H<<E-\frac{1}{2}\Delta$$

چون $E>>N$ است بنابراین:

$$\left(\frac{2\pi E}{\omega}\right)\left\{1+\frac{N\Delta}{2E}-1+\frac{N\Delta}{2E}\right\}=\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N E^{N-1}N\Delta$$

اگر $\Delta=\hbar\omega$ باشد در اینصورت داریم:

$$\omega_\circ=\frac{\omega}{\Omega}$$

$$\omega_\circ=\frac{\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N E^{N-1}N\hbar\omega}{\left[\left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^{N-1}\frac{1}{(N-1)!}\right]}$$

$$\omega_{\circ} = N\,(N-1)!\,(2\pi)^N\,\hbar^N = N!\,h^N$$

و همانطور که مي دانيم ضريب N! به دليل تميز ناپذيري نوسانگر ها ظاهر شده است.

۲-۹ انتگرال زير را حل كنيد.

$$\int\ldots\int (dx_1 dx_2 .. dx_{3N})$$

$$\circ \le \sum_{i=1}^{3N} |x_i| \le R$$

و از آن براي تعيين حجم ناحية مربوطه به فضاي يك فاز يك گاز نسبيتي $\varepsilon = pc$ ، $3N$ ذره اي كه در يك بعد حركت مي كنند استفاده كنيد.

تعداد راههايي كه مي توان انرژي E را بين ذرات توزيع كرد را بدست آوريد و ثابت كنيد كه $\omega_{\circ} = h^{3N}$

ب- ترموديناميك اين سيستم را با ترموديناميك سيستمي كه در مساله ۲-۸ در نظر گرفته شده است مقايسه كنيد.

حل:

$$V_n = C_n R^n \;\Rightarrow\; dV_n = n C_n R^{n-1} dR$$

مي دانيم كه

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

بنابراين اگر n تا از اين انتگرال ها را در هم ضرب مي كنيم داريم

$$\int\ldots\ldots\int e^{-\sum_i^n x_i} \prod_{i=1}^{n} dx_i = 1 \;\Rightarrow\; \int e^{-R} dV = 1$$

كه

$$\sum_i x_i = R \quad , \quad \prod_{i=1}^{n} dx_i = dV$$

$$\int e^{-R} nC_n R^{n-1} dR = nC_n \int e^{-R} R^{n-1} dR = 1 \Rightarrow nC_n \Gamma(n) = 1$$

$$C_n = \frac{1}{n\Gamma(n)} = \frac{1}{n!}$$

$$V_n = \frac{R^n}{n!}$$

براي فضاي $3N$ بعدي داريم.

$$V_{3N} = \frac{R^{3N}}{(3N)!}$$

R شعاع ابر پوسته(hypershell) مي باشد.

$$S_{3N} = \frac{R^{3N-1}}{(3N-1)!}$$

مي خواهيم انرژي E را بين $3N$ ذره توزيع كنيم تعداد راههاي ممكن عبارت است از:

$$\Omega = \frac{R^{3N-1}}{(3N-1)!}$$

كه $R = \frac{E}{pc}$ تعداد بسته هاي pc كه به هر ذره مي رسد.

فصل 3

۳-۱ الف) فرمول (۳-۲-۳۶) را از معادله های (۳-۲-۱۴) و (۳-۲-۳۵) بدست آورید.
ب) فرمول های (۳-۲-۳۹) و (۳-۲-۴۰) را از معادله های (۳-۲-۳۷) و (۳-۲-۳۸) بدست آورید.

حل:

الف)

$$\langle n_r\rangle = \omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r} \ln \Gamma \Big|_{\omega_r = 1}$$ (۳-۲-۱۴)

$$\langle n_r^2\rangle = \frac{\sum_{\{n_r\}}{}' n_r^2 W\{n_r\}}{\sum_{\{n_r\}}{}' W\{n_r\}} = \frac{1}{\Gamma}\left(\omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r}\right)\left(\omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r}\right)\Gamma$$ (۳-۲-۳۵)

$$\langle (\Delta n_r)^2\rangle = \langle n_r^2\rangle - \langle n_r\rangle^2 = \frac{1}{\Gamma}\left(\omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r}\right)\left(\omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r}\right)\Gamma - \left(\omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r}\ln \Gamma\right)^2$$

$$=\frac{\omega_r}{\Gamma}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega_r}+\omega_r\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\omega_r^2}\right)-\left(\omega_r\frac{\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega_r}}{\Gamma}\right)^2$$

$$=\omega_r\left[\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega_r}-\frac{\omega_r}{\Gamma^2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega_r}\right)^2+\frac{\omega_r}{\Gamma}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\omega_r^2}\right]$$

$$=\omega_r\left[\frac{\Gamma-\omega_r\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega_r}}{\Gamma^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega_r}+\frac{\omega_r}{\Gamma}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\omega_r^2}\right]$$

$$=\omega_r\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\omega_r}\left(\frac{\omega_r}{\Gamma}\right)\right]\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega_r}+\frac{\omega_r}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial\omega_r}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega_r}\right)\right\}$$

ب)

$$=\omega_r\frac{\partial}{\partial\omega_r}\left(\frac{\omega_r}{\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial\omega_r}\right)=\left(\omega_r\frac{\partial}{\partial\omega_r}\right)\left(\omega_r\frac{\partial\ln\Gamma}{\partial\omega_r}\right)$$ ۳-)

(۳۶-۲

$$=\left(\omega_r\frac{\partial}{\partial\omega_r}\right)\left(\omega_r\frac{\partial}{\partial\omega_r}\right)\ln\Gamma\bigg|_{all\ \omega's=1}$$

از (۳-۲-۳۸) داریم:

$$U=\frac{\sum_r\omega_r E_r\exp(-\beta E_r)}{\sum_r\omega_r\exp(-\beta E_r)}\bigg|_{all\ \omega's=1}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial \omega_r}=\circ=\left.\frac{E_r\exp\left(-\beta E_r\right)}{\sum_r \omega_r \exp\left(-\beta E_r\right)}\right|_{\omega,s=1}-\left.\frac{\sum_r \omega_r E_r^2 \exp\left(-\beta E_r\right)}{\sum_r \omega_r \exp\left(-\beta E_r\right)}\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega_r}\right)\right|_{all\ \omega's=1}$$

$$-\left.\frac{\left[\sum_r \omega_r \exp\left(-\beta E_r\right)\right]\exp\left(-\beta E_r\right)}{\left[\sum_r \omega_r \exp\left(-\beta E_r\right)\right]^2}\right|_{all\ \omega's=1}+\left.\left[\frac{\sum_r \omega_r E_r \exp\left(-\beta E_r\right)}{\sum_r \omega_r \exp\left(-\beta E_r\right)}\right]^2\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega_r}\right)\right|_{all\ \omega's=1}$$

$$E_r\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}-\langle E_r^2\rangle\left.\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega_r}\right)_U\right|_{all\ \omega's=1}-\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}(U)+U^2\left.\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega_r}\right)\right|_{all\ \omega's=1}=\circ \qquad (*)$$

$$\left.\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega_r}\right)\right|_{all\ \omega's=1}=\frac{E_r-U}{\langle E_r^2\rangle-U^2}\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}$$

كه همان رابطه (۳-۲-۳۹) مي باشد.

$$\frac{\langle \Delta n_r^2\rangle}{\eta}=\omega_r\left\{\frac{\exp\left(-\beta E_r\right)}{\sum_r \omega_r \exp\left(-\beta E_r\right)}-\frac{\omega_r E_r \exp\left(-\beta E_r\right)}{\sum_r \omega_r \exp\left(-\beta E_r\right)}\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega_r}\right)_U\right.$$

$$\left.-\frac{\omega_r\left[\exp\left(-\beta E_r\right)\right]}{\left[\sum_r \omega_r \exp\left(-\beta E_r\right)\right]^2}+\frac{\omega_r \exp\left(-\beta E_r\right)\sum_r \omega_r E_r \exp\left(-\beta E_r\right)}{\left[\sum_r \omega_r \exp\left(-\beta E_r\right)\right]^2}\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega_r}\right)_U\right\}$$

$$+\omega_r\left\{\left[-\frac{\sum_r \omega_r E_r \exp\left(-\beta E_r\right)}{\sum_r \omega_r \exp\left(-\beta E_r\right)}+U\right]\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega_r}\right)_U\right.$$

$$+\left[-\frac{\sum_r \omega_r E_r \exp(-\beta E_r)}{\sum_r \omega_r \exp(-\beta E_r)}+U\right]\omega_r\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U$$

$$+\left[-\frac{E_r \exp(-\beta E_r)}{\sum_r \omega_r \exp(-\beta E_r)}+\frac{\sum_r \omega_r E_r^2 \exp(-\beta E_r)}{\sum_r \omega_r \exp(-\beta E_r)}\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U\right.$$

$$+\frac{\left[\sum_r \omega_r \exp(-\beta E_r)\right]\exp(-\beta E_r)}{\left[\sum_r \omega_r \exp(-\beta E_r)\right]^2}$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\sum_r \omega_r E_r \exp(-\beta E_r)}{\sum_r \omega_r \exp(-\beta E_r)}\right)^2\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U+\frac{\partial U}{\partial\omega_r}\right]\omega_r\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U\right\}_{all\ \omega\text{'s}=1} \Rightarrow$$

$$\frac{\langle(\Delta n_r)^2\rangle}{\eta}=\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}-\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}E_r\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U-\left(\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}\right)^2+\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}U\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U$$

$$-\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}E_r\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U+\langle E_r^2\rangle\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U+\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}U\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U-U^2\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U^2$$

$$= -\left[\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}E_r - \frac{\langle n_r\rangle}{\eta}U - \langle E_r^2\rangle\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U + U^2\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U\right]\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U$$

$$+\frac{\langle n_r\rangle}{\eta} - \left(\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}\right)^2 - \frac{\langle n_r\rangle}{\eta}E_r\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U + \frac{\langle n_r\rangle}{\eta}U\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U$$

عبارت درون [...] طبق رابطه * در (a) مساوي با صفر است.

$$\Rightarrow \frac{\langle(\Delta n_r)^2\rangle}{\eta} = \frac{\langle n_r\rangle}{\eta} - \left(\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}\right)^2 + \frac{\langle n_r\rangle}{\eta}(U - E_r)\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega_r}\right)_U\Bigg|_{all\ \omega's=1}$$

$$= \frac{\langle n_r\rangle}{\eta}\left[1 - \frac{\langle n_r\rangle}{\eta} + (U - E_r)\frac{(U - E_r)}{\langle E_r^2\rangle - U^2}\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}\right]$$

$$= \frac{\langle n_r\rangle}{\eta}\left[1 - \frac{\langle n_r\rangle}{\eta} + \frac{(U - E_r)^2}{\langle (U - E_r)^2\rangle}\frac{\langle n_r\rangle}{\eta}\right] \qquad (۴۰-۲-۳)$$

$$\langle (U - E_r)^2\rangle = \langle E_r^2\rangle + \langle U^2\rangle - 2\langle E_r\rangle\langle U\rangle = \langle E_r^2\rangle - U^2$$

۳-۲ ثابت كنيد كه $g''(x_\circ)$ در معادله (۳-۲-۲۵) برابر با $\left\langle (E-U)^2\right\rangle \exp(2\beta)$ است.

سپس نشان دهيد كه معادله (۳-۲-۲۸) از لحاظ فيزيكى معادل با (۳-۶-۹) مى باشد.

حل:

$$g''(x_\circ) \cong \frac{f''(x_\circ)}{f(x_\circ)} - \frac{U^2-U}{x_\circ^2} \qquad (۲۵-۲-۳)$$

$$f(z) = \sum_r \omega_r z^{E_r} \Rightarrow f'(z) = \sum_r \omega_r E_r z^{E_r-1}$$

$$f''(z) = \sum_r \omega_r E_r (E_r-1) z^{E_r-2} \Rightarrow$$

$$x_\circ = \exp(-\beta) \quad \& \; g''(x_\circ) = \frac{\sum_r \omega_r E_r (E_r-1) x_\circ^{E_r-2}}{\sum_r \omega_r x_\circ^{E_r}} - \frac{U^2-U}{x_\circ^2}$$

$$g''(x_\circ) = \frac{\sum_r \omega_r E_r (E_r-1) e^{-\beta(E_r-2)}}{\sum_r \omega_r e^{-\beta E_r}} - \frac{U^2-U}{e^{-2\beta}}$$

$$= \frac{\sum_r \omega_r E_r^2 e^{-\beta E_r} e^{-2\beta}}{\sum_r \omega_r e^{-\beta E_r}} - \frac{\sum_r \omega_r E_r e^{-\beta E_r} e^{-2\beta}}{\sum_r \omega_r e^{-\beta E_r}} - e^{2\beta}\left(U^2-U\right)$$

$$e^{2\beta}\left[\langle E^2\rangle - \langle E\rangle - U^2 + U\right] = e^{2\beta}\left(\langle E^2\rangle - U^2\right)$$

$$= e^{2\beta}\left[\langle E\rangle^2 + U^2 - 2U^2\right] = e^{2\beta}\left[\langle E\rangle^2 + U^2 - 2U\langle E\rangle\right]$$

$$e^{2\beta}\left[\langle E^2\rangle - 2\bar{E}U + U^2\right] = e^{2\beta}\left\langle (E_r - U)^2 \right\rangle$$

در اینجا از رابطه $\langle E\rangle = U$ استفاده کرده ایم.

۳-۵ با استفاده از این حقیقت که انرژی آزاد هلمهولتز A (N,V,T) یک سیستم ترمودینامیکی باید یک خاصیت فزونور باشد ثابت کنید که:

$$N\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T}+V\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T}=A$$

[توجه کنید که این نتیجه به رابطه معروف $\mu N = A+PV \equiv G$ اشاره دارد.]

حل:

$$A\left(N,V,T\right)=-kT\ \ln Q_N\left(V,T\right)$$

در سیستم کانونیك T ثابت است.

$$dA=\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T}dN+\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T}dV$$

$$\int dA=\int\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T}dN+\int\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T}dV\quad\Rightarrow$$

$$A=\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T}N+\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T}V\ \Rightarrow\ A=\mu N-PV\ \Rightarrow\ \mu N=A+PV\equiv G$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T}=-P$$ نافزونور:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T}=\mu$$

نافزونور:

راه حل دوم:

اگر تابع $f\left(x_1,x_2,...\right)$ یك تابع متقارن از مرتبه n باشد آنگاه طبق قضیه اویلر داریم:

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = nf$$

چون A فزونور است داریم:

$$A(\alpha N, \alpha V, \alpha T) = \alpha A(N, V, T)$$

بنابراین A یك تابع متقارن مرتبه ۱ است.
و طبق قضیه اویلر داریم:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T} N + \left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T} + \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{V,T} = A$$

اما مي‌دانیم که در سیستم هاي کانونیك $T = Const$.

$$\Rightarrow \quad A = \left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T} N + \left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T}$$

۳-۶ الف) فرض کنید که تعداد حالت های قابل دسترس یک سیستم آماری داده شده ، Ω باشد. نشان دهید که انتروپی سیستم که با معادله (۳-۳-۱۳) داده شده است وقتی ماکزیمم است که همه Ωها بطور مساوی اتفاق بیفتند.

ب) از طرف دیگر اگر یک آنسامبل از سیستم ها با انرژی مشترک (با مقدار میانگین $\bar{E}$) داشته باشیم نشان دهید که آنتروپی که با همان فرمول قبل بیان شده است وقتی ماکزیمم است که $P_r \propto \exp(-\beta E_r)$ باشد. βیک ثابت است که با مقدار داده شده $\bar{E}$ تعیین شده است.

ج) درنهایت اگر یک آنسامبل از سیستم ها با انرژی مشترک (با مقدار میانگین $\bar{E}$) و همچنین تعداد ذرات مشترک (با مقدار میانگین $\bar{N}$) داشته باشیم نشان دهید که آنتروپی که با عبارت مشابهی داده شده وقتی ماکزیمم است که $p_r \propto \exp(-\alpha N_r - \beta E_r)$ و β, α مقادیر ثابتی هستند که با مقادیر مفروض $\bar{N}, \bar{E}$ تعیین شده اند.

حل:

الف)

$$\frac{S}{k}=-\sum P_r \ln P_r \qquad -۳-۳)$$
(۱۳

براي ماكزيمم بودن داريم:

$$S=-k\sum P_r \ln P_r$$

$$\delta S=-k\sum_r\left(\delta P_r \ln P_r+\frac{\delta P_r}{P_r}P_r\right)=-k\sum_r\left(\ln P_r+1\right)\delta P_r=\circ$$

اگر P_r مستقل باشند جمع بالا وقتي صفر مي شد كه تك تك جملات مساوي صفر شوند اما P_r ها مستقل نيستند پس P_{r-1} جمله مستقل هستند و چون چنين قيدي داريم از روش ضرايب لاگرانژ استفاده مي كنيم.

$$\sum_r P_r=1 \Rightarrow \sum_r \delta P_r=\circ$$

$$\delta S=-k\sum_{r=\circ}^{\Omega}(\ln P_r+1)\delta P_r \qquad \sum_{r=\circ}^{\Omega}\delta P_r=\circ$$

بنابراين:

$$\sum_{r=\circ}^{\Omega}\left(\ln P_r+1\right)\delta P_r+\alpha\sum_{r=\circ}^{\Omega}\delta P_r=\circ\Rightarrow\sum_{r=\circ}^{\Omega}\left(\ln P_r+1+\alpha\right)\delta P_r=\circ\Rightarrow$$

$$\ln P_r=-\left(1+\alpha\right) \;\Rightarrow\; P_r=e^{-(1+\alpha)} \;\Rightarrow\; \sum_{r=\circ}^{\Omega}P_r=1\,,\;\sum_{r=\circ}^{\Omega}e^{-(1+\alpha)}=1\Rightarrow P_r=\frac{1}{\Omega}$$

ب) آنسامبل كانونيك

$$\overline{E}=\sum_r P_r E_r \;\Rightarrow\; \sum E_r\delta P_r=\circ \;\Rightarrow\; \beta\sum E_r\delta P_r=\circ\;,\;\sum P_r=1$$

$$\sum\delta P_r=\circ \;\Rightarrow\; \alpha\sum\delta P_r=\circ$$

$$\sum\left(\ln P_r+1\right)\delta P_r+\sum\alpha\,\delta P_r+\sum\beta E_r\delta P_r=\circ \;\Rightarrow$$

$$\sum\left(\ln P_r+1+\alpha+\beta E_r\right)\delta P_r=0 \;\Rightarrow\; \ln P_r=-\left(1+\alpha\right)-\beta E_r \;\Rightarrow$$

$$P_r=e^{-(1+\alpha)}e^{-\beta E_r} \;\Rightarrow\; P_r\propto e^{-\beta E_r}$$

ج) آنسامبل كانونيك بزرگ:

$$\sum P_r=1 \quad\Rightarrow\quad \gamma\sum\delta P_r=0$$

$$\overline{E}=\sum E_r P_r \quad\Rightarrow\; \sum\beta E_r\delta P_r=0$$

$$\overline{N}=\sum N_r P_r \quad\Rightarrow\; \sum\alpha N_r\delta P_r=0$$

$$\sum\left(\ln P_r+1+\gamma+\beta E_r+\alpha N_r\right)\delta P_r=0 \Rightarrow$$

$$P_r=e^{-(1+\gamma)}e^{-\alpha N_r-\beta E_r} \;\Rightarrow\; P_r\propto e^{-\alpha N_r-\beta E_r}$$

۳-۷ در حالت كلي ثابت كنيد كه:

$$C_P-C_V=-k\frac{\left[\frac{\partial}{\partial T}\left\{T\left(\frac{\partial\ln Q}{\partial V}\right)_T\right\}\right]_V^2}{\left(\frac{\partial^2\ln Q}{\partial V^2}\right)_T}>0$$

بررسي كنيد كه اين مقدار براي يك گاز ايده آل برابر با Nk مي باشد.

حل:

$$C_V=\left(\frac{đQ}{dT}\right)_V=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{N,V} \quad,\quad C_P=\left(\frac{đQ}{dT}\right)_P=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{N,P}$$

$$dS=\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT+\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$$

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V+T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$C_P-C_V=T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

از معادلات ماکسول داریم:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T=\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

$$C_P-C_V=T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

اگر $f(x,y,z)=0$ باشد آنگاه داریم:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z=-1$$

$$C_P-C_V=-T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2$$

$$P=kT\left(\frac{\partial}{\partial V}\ln Q\right)_{N,T}\quad,\quad \frac{\partial P}{\partial V}=kT\left(\frac{\partial^2}{\partial V^2}\ln Q\right)_{N,T}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=-\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

$$C_P-C_V=-T\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T^2\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T=-T\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2$$

$$=-T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T^{-1}=-T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T^{-1}$$

$$=\frac{-T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)^2 V}{kT\,\frac{\partial^2}{\partial V^2}\ln Q}=-\frac{1}{k}\frac{\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(kT\left(\frac{\partial}{\partial V}\ln Q\right)\right)\right]^2}{\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial V^2}}$$

براي گاز ايده آل داريم:

$$C_P-C_V=\frac{-k\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(T\,\frac{\partial \ln Q}{\partial V}\right)\right]^2}{\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial V^2}}>0$$

$$Q_N=\frac{1}{N!}\left[\frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}\right]^N \quad \Rightarrow$$

$$\ln Q_N=-\ln N!+N\left\{\ln V-\ln h^3+\frac{3}{2}\ln(2\pi mk)+\frac{3}{2}\ln T\right\}$$

$$\frac{\partial \ln Q_N}{\partial V}=\frac{N}{V}\quad,\quad T\,\frac{\partial \ln Q_N}{\partial V}=\frac{N}{V}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(T\,\frac{\partial \ln Q_N}{\partial V}\right)=\frac{N}{V}\quad,\quad \frac{\partial^2 \ln Q_N}{\partial V^2}=-\frac{N}{V^2}$$

$$C_P-C_V=\frac{-k\,\frac{N^2}{V^2}}{\frac{-N}{V}}=kN>0$$

۳-۸ نشان دهيد كه براى يک گاز ايده آل:

$$\frac{S}{Nk}=\ln\left(\frac{Q_1}{N}\right)+T\left(\frac{\partial}{\partial T}\ln Q_1\right)_P$$

حل:

$$Q_N=\frac{1}{N!}\left[Q_1(N,T)\right]^N \quad , \; A=-kT\ln Q_N$$

$$S=-\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{N,V}=k\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[T\ln Q_N(V,T)\right]\right\}_V$$

$$=k\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(\ln Q_1^N-\ln N!\right)\right]\right\}_V$$

$$=k\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(N\ln Q_1-N\ln N+N\right)\right]\right\}_V=Nk\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left(T\ln\left(\frac{Q_1}{N}\right)+T\right)\right\}_V$$

$$\frac{S}{Nk}=\ln\left(\frac{Q_1}{N}\right)+T\left[\frac{\partial}{\partial T}\ln\left(\frac{Q_1}{N}\right)\right]_V+1=\ln\left(\frac{Q_1}{N}\right)+T\left(\frac{\partial}{\partial T}\ln Q_1\right)_V+1$$

$$\left(\frac{\partial\ln Q_1}{\partial T}\right)_p=\left(\frac{\partial\ln Q_1}{\partial T}\right)_V+\left(\frac{\partial\ln Q_1}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial\ln Q_1}{\partial T}\right)_V=\left(\frac{\partial\ln Q_1}{\partial T}\right)_p-\left(\frac{\partial\ln Q_1}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$A=-kT\ln Q_N=-kTN\ln Q_1+kTN\ln N! \;\Rightarrow\; \ln Q_1=\frac{-A}{NkT}+\frac{\ln N!}{N} \;\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial \ln Q_1}{\partial V}\right)_T = -\frac{1}{NkT}\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_T + \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\ln N!}{N}\right) = \frac{P}{NkT} = \frac{1}{V}$$

$$PV = NkT \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{Nk}{P}$$

$$T\left(\frac{\partial \ln Q_1}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial \ln Q_1}{\partial T}\right)_P - \frac{NkT}{PV} = T\left(\frac{\partial \ln Q_1}{\partial T}\right)_P - 1$$

$$\frac{S}{Nk} = \ln\left(\frac{Q_1}{N}\right) + T\left(\frac{\partial \ln Q_1}{\partial T}\right)_P$$

۳-۹ اگر یک گاز ایده آل تک اتمی بصورت آدیاباتیک (بی درو)، طوری منسبط شود که حجم آن دو برابر حجم اولیه شود نسبت فشار نهایی به فشار اولیه چه مقدار خواهد بود؟
اگر در طول این فرایند مقداری گرما به سیستم داده شود فشار نهایی بیشتر یا کمتر از مقدار قبلی خواهد بود؟ جواب خود را با استنتاج مربوط به فرمول $\frac{P_f}{P_i}$ تایید کنید.

حل:

الف)

$$S = Nk\left[\ln\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}\right]$$

$$dQ = TdS \qquad dQ = 0 \Rightarrow S_f = S_i$$

$$\left[\ln\frac{V_i}{N}\left(\frac{2\pi mkT_i}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}\right]Nk = \left[\ln\frac{V_f}{N}\left(\frac{2\pi mkT_f}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}\right]Nk$$

$$V_i T_i^{\frac{3}{2}} = V_f T_f^{\frac{3}{2}} \Rightarrow V_i (P_i V_i)^{\frac{3}{2}} = V_f (P_f T_f)^{\frac{3}{2}}$$

که در اینجا از معادله حالت گاز کامل استفاده کرده ایم. $(PV = NkT)$.

$$P_i V_i^{\frac{5}{3}} = P_f V_f^{\frac{5}{3}}$$

از مقایسه این معادله با معادله مشهود فرآیند بی دررو $PV^{\gamma} = const$ داریم:

$$\gamma = \frac{5}{3}$$

$$V_f = 2V_i \qquad \frac{P_f}{P_i} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(\frac{V_i}{2V_i}\right)^{\frac{5}{3}} = 2^{-\frac{5}{3}}$$

ب)

$$dQ = T dS \Rightarrow \Delta S = \int \frac{dQ}{T} \Rightarrow S_f - S_i = \int \frac{dQ}{T}$$

$$Nk \ln\left(\frac{V_f T_f^{\frac{3}{2}}}{V_i T_i^{\frac{3}{2}}}\right) = Nk \ln \frac{V_f^{\frac{5}{2}} P_f^{\frac{3}{2}}}{V_i^{\frac{5}{2}} P_i^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dQ}{T} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{P_f}{P_i}\right)^{\frac{3}{2}} = \exp\left(\frac{1}{Nk} \int \frac{dQ}{T}\right)$$

$$\frac{P_f}{P_i} = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\frac{5}{3}} \exp\left(\frac{2}{3Nk} \int \frac{dQ}{T}\right) \Rightarrow \left(\frac{P_f}{P_i}\right)_{\text{جدید}} \geq \left(\frac{P_f}{P_i}\right)_{\text{قدیم}}$$

اگر $dQ = 0$ باشد معادله قسمت (الف) بدست مي آيد.

۱۲-۳ اگر « حجم آزاد » $\bar{V}$ یک سیستم کلاسیکی با معادله زیر تعریف شود:

$$\bar{V}^N = \int e^{\{\bar{U}-u(q_i)\}/NT} \prod_{i=1}^{N} d^3q_i$$

که $\bar{U}$میانگین انرژي پتانسیل و $u(q_i)$ انرژي پتانسیل واقعي بصورت تابعي از ساختار مولکول مي باشد. نشان دهید

$$S = Nk\left[\ln\left\{\frac{\bar{V}}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right\}+\frac{5}{2}\right]$$

* چه مفهومی است که کمیت$\bar{V}$ را به عنوان« حجم آزاد» سیستم توجیه می کند؟ جواب خود را با در نظر گرفتن یک حالت خاص یعنی، در مورد یک گاز کره سخت، به اثبات رسانید.

حل:

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \frac{P_i^2}{2^m} + u(q_i) - \bar{U}$$

$$Q_N = \frac{1}{N!h^{3N}} \int e^{-\beta H} \prod_{i=1}^{N} d^3P_i\, d^3q_i$$

$$= \frac{1}{N!h^{3N}} \int \exp\left[-\beta\left\{\sum_i \frac{P_i^2}{2m} + U(q_i) - \bar{U}\right\}\right]$$

$$\prod_{i=1}^{N} d^3P_i \prod_{i=1}^{N} d^3q_i \quad \Rightarrow$$

$$Q_N=\frac{\bar{V}^N}{N!h^{3N}}\int e^{-\beta\sum_i\frac{P_i^2}{2m}}\prod_{i=1}^{N}d^3P_i=\frac{\bar{V}^N}{N!h^{3N}}\left[\int e^{-\frac{P^2}{2mkT}}4\pi P^2dP\right]^N$$

$$=\frac{\bar{V}^N}{N!h^{3N}}\left(2\pi mkT\right)^{\frac{3N}{2}}$$

$$A=-kT\ln Q_N=-kTN\ln\left[\frac{\bar{V}}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$$

$$S=-\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{N,V}=Nk\left[\ln\frac{\bar{V}}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{2}\right]$$

۱۳-۳ تابع پارش و خصوصیات ترمودینامیکی مهم یک گاز ایده آل شامل N_1 مولکول با جرم m_1 و N_2 مولکول با جرم m_2 که در حجم V و دمای T محدود شده اند را محاسبه کنید فرض کنید مولکولهای یک نوع گاز از یکدیگر تمیز ناپذیرند در صورتی که مولکولهای یک نوع از مولکولهای نوع دیگر تمیز پذیرند.

جواب های خود را با حالت یک گاز ایده آل شامل N_1+N_2 مولکول که همه از یک نوع هستند و دارای جرم m می باشند بطوریکه $m(N_1+N_2)=m_1N_1+m_2N_2$ باشد مقایسه کنید.

حل:

الف)

$$Q_N(V,T)=\int e^{-\beta H}d^{3N}q\,d^{3N}P \quad , \quad N_1+N_2=N$$

$$H=\sum_{i=1}^{N_1}\frac{P_i^2}{2m_1}+\sum_{i=1}^{N_2}\frac{P_i^2}{2m_2}$$

$$Q_{N_1}=\frac{1}{N_1!}\left[\frac{V}{h^3}\left(2\pi m_1 kT\right)^{3/2}\right]^{N_1}$$

$$Q_{N_2}=\frac{1}{N_2!}\left[\frac{V}{h^3}\left(2\pi m_2 kT\right)^{3/2}\right]^{N_2}$$

$$Q_{tot}=Q_{N_1}Q_{N_2}=\frac{1}{N_1!N_2!}\frac{V^{N_1+N_2}}{h^{3(N_1+N_2)}}\left(2\pi m_1 kT\right)^{3N_1/2}\left(2\pi m_2 kT\right)^{3N_2/2}$$

$$Q_{tot}=Q_N=\frac{V^N}{h^3 N_1!N_2!}\left(2\pi m_1 kT\right)^{3N_1/2}\left(2\pi m_2 kT\right)^{3N_2/2}$$

$$A=-kT\ln Q_N=-NkT\ln V+3NkT\ln h$$

$$+kTN_1\ln N_1-kTN_1+kTN_2\ln N_2-kTN_2$$

$$-kT\frac{3N_1}{2}\ln\left(2m_1\pi kT\right)-kT\frac{3N_2}{2}\ln\left(2m_2\pi kT\right)$$

$$=-kTN\ln V+3NkT\ln h+kTN_1\ln N_1-kTN+kTN_2\ln N_2$$

$$-\frac{3N_1}{2}kT\ln\left(2m_1\pi kT\right)-\frac{3N_2}{2}kT\ln\left(2m_2\pi kT\right)$$

$$P=-\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T}=\frac{kTN}{V}\Rightarrow$$

$$PV=NkT\quad\Rightarrow\quad PV=\left(N_1+N_2\right)kT$$

$$S=-\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{N,V}=-\Big[3Nk\ln h+N_1k\ln N_1-kN+kN_2\ln N_2$$

$$-\frac{3N_1}{2}k\ln\left(2\pi m_1kT\right)-\frac{3N_1}{2}kT\frac{1}{T}-\frac{3N_2}{2}k\ln\left(2\pi m_2kT\right)-\frac{3N_2}{2}kT\frac{1}{T}\Big]$$

$$S=-3Nk\ln h-N_1k\ln N_1+Nk-N_2k\ln N_2+$$

$$\frac{3}{2}N_1k+\frac{3}{2}N_2k+\frac{3N_1}{2}k\ln\left(2m_1\pi kT\right)+\frac{3N_2}{2}k\ln\left(2m_2\pi kT\right)$$

$$U=A+TS=-kTN\ln V+3NkT\ln h+N_1kT\ln N_1-kTN+N_2kT\ln N_2$$

$$+\frac{3}{2}N_1kT\ln(2\pi m_1kT)-\frac{3}{2}N_2kT\ln(2\pi m_2kT)$$

$$+T\Big[-3Nk\ln h-N_1k\ln N_1+Nk-N_2k\ln N_2+\frac{3}{2}N_1k+\frac{3}{2}N_2k$$

$$+\frac{3}{2}N_1k\ln(2\pi m_1kT)+\frac{3}{2}N_2k\ln(2\pi m_2kT)\Big]=\frac{3}{2}(N_1+N_2)k\quad\Rightarrow$$

$$U=\frac{3}{2}NkT$$

ب)

$$Q_{N_1+N_2}(V,T)=\frac{1}{(N_1+N_2)!}\left[\frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}\right]^{N_1+N_2}$$

$$A(N,V,T)=-kT\ln Q_N(V,T)=kT\ln(N_1+N_2)kT\ln\left[\frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$S=-\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{N,V}=-k\ln(N_1+N_2)!+(N_1+N_2)k\ln\left[\frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}\right]+\frac{3}{2}(N_1+N_2)k$$

$$P=-\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T}=(N_1+N_2)\frac{kT}{V}\ \Rightarrow\ PV=(N_1+N_2)kT$$

$$A=kT\left[(N_1+N_2)\ln(N_1+N_2)-N_1-N_2\right]-(N_1+N_2)kT\ln\left[\frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$N_1+N_2=N\ \Rightarrow$$

$$\mu=\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T}=kT\ln(N_1+N_2)-kT\ln\left[\frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$U=-T^2\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{A}{T}\right)\right]_{N,V}=(N_1+N_2)kT^2\left(\frac{3}{2T}\right)\ \Rightarrow\ U=\frac{3}{2}(N_1+N_2)kT$$

وابستگي بين P و T و بين U و T فقط به (N_1+N_2) وابسته است كه تعداد كل ذرات است كه در دو مورد يكسان است.

$$S=-\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{N,V}=kN\ln V-k(N_1+N_2)\ln(N_1+N_2)+k(N_1+N_2)$$

$$+\frac{3}{2}k(N_1+N_2)\ln(2\pi mkT)+\frac{3}{2}kT(N_1+N_2)\frac{1}{T}$$

$$S=kN\ln V-k(N_1+N_2)\ln(N_1+N_2)+k(N_1+N_2)$$

$$+\frac{3}{2}k\left(N_1+N_2\right)\ln\left(2\pi mkT\right)+\frac{3}{2}k\left(N_1+N_2\right)$$

$$U=A+ST=-kTN\ln V-kT\left(N_1+N_2\right)\ln\left(N_1+N_2\right)$$

$$-kT\left(N_1+N_2\right)-\frac{3}{2}kT\left(N_1+N_2\right)\ln\left(2\pi mkT\right)+T\left[kN\ln V\right.$$

$$+k\left(N_1+N_2\right)\ln\left(N_1+N_2\right)+k\left(N_1+N_2\right)+\frac{3}{2}k\left(N_1+N_2\right)\ln\left(2\pi mkT\right)$$

$$\left.+\frac{3}{2}kT\left(N_1+N_2\right)\right]$$

$$U=\frac{3}{2}kT\left(N_1+N_2\right)\quad\Rightarrow\quad U=\frac{3}{2}Nk$$

همانطور که ملاحظه شد کمیتهايي مثل V,P در هر دو حالت يکسان هستند و فقط به تعداد ذرات که در هر دو حالت $\left(N_1+N_2\right)$ مي باشند وابسته است. ولي کميت هاي ديگري مثل S,A در هر دو حالت متفاوت هستند.

۳-۱۵ **نشان دهید که تابع پارش $Q_N(V,T)$ یک گاز استاتیک نسبیتی شامل N مولکول تک اتمی با رابطه انرژی-تکانه $\varepsilon=pc$ که در اینجا c سرعت نور است با رابطه زیر داده می شود.**

$$Q_N(V,T)=\frac{1}{N!}\left\{8\pi V\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\right\}^N$$

ترمودینامیک این سیستم را مطالعه کنید خصوصاً بررسی کنید که:

$$PV=\frac{1}{3}U \quad ,\frac{V}{N}=3kT \quad \gamma=\frac{4}{3}$$

آنگاه از معکوس فرمول (۳-۴-۷) استفاده کنید و یک رابطه برای چگالی حالت های این سیستم $g(E)$ بدست آورید.

حل:

$$H=\sum_{i=1}^{N} cp_i \quad , \quad Q_N(V,T)=\frac{1}{N!h^{3N}}\int_{\circ}^{\infty} e^{-\beta c\sum_i P_i}\prod_{i=1}^{N}\left(d^3q_i\, d^3P_i\right)$$

$$Q_N(V,T)=\frac{V^N}{N!h^{3N}}\left[\int_{\circ}^{\infty} e^{-\beta cP}4\pi P^2 dP\right]^N=\frac{V^N}{N!h^{3N}}\left[4\pi\int_{\circ}^{\infty} e^{-\beta pc}P^2 dP\right]^N$$

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{-\beta cP}P^2dP=\frac{d^2}{d(\beta c)^2}\int_{\circ}^{\infty} e^{-\beta cP}dP=\frac{d^2}{d(\beta c)^2}\left(\frac{-1}{\beta c}e^{-\beta c}\right)_{\circ}^{\infty}$$

$$=\frac{d^2}{d(\beta c)^2}\left(\frac{1}{\beta c}\right)=\frac{2}{\beta^3 c^3}$$

$$Q_N(V,T)=\frac{V^N}{N!h^{3N}}\left(8\pi\frac{k^3T^3}{c^3}\right)^N=\frac{1}{N!}\left\{8\pi V\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\right\}^N$$

$$A=-kT\ln Q_N=kT\ln N!-kTN\ln\left[8\pi V\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\right]$$

$$=kT(N\ln N-N)-NkT\ln\left[8\pi V\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\right]$$

$$S=-\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{N,V}=-k\ln N!+Nk\ln\left[8\pi V\left(\frac{kT}{hc}\right)^{3}\right]+3Nk$$

$$\mu=\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T}=kT\ln N-kT\ln\left[8\pi V\left(\frac{kT}{hc}\right)^{3}\right]$$

$$U=-T^{2}\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{A}{T}\right)\right]_{N,V}=T^{2}kN\left(\frac{3}{T}\right)=3NkT\ \Rightarrow\ U=3NkT$$

$$P=-\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T}=kTN\left(\frac{1}{V}\right)\Rightarrow\ PV=NkT=\frac{1}{3}U\ ,\ C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V}=3Nk$$

$$C_P=\left(\frac{\partial(E+PV)}{\partial T}\right)_{P}=\frac{\partial}{\partial T}\left(U+\frac{1}{3}U\right)=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{4}{3}\times 3NkT\right)=4Nk\ \Rightarrow$$

$$\gamma=\frac{C_P}{C_V}=\frac{4}{3}$$

۱۶-۳ یک سیستم مشابه مساله قبل در نظر بگیرید اما شامل $3N$ ذره که در یک بعد حرکت می کنند نشان دهید که تابع پارش در این حالت با رابطه زیر داده می شود:

$$Q_{3N}(L,T)=\frac{1}{(3N)!}\left[2L\left(\frac{kT}{hc}\right)\right]^{3N}$$

L « طول» فضای دسترس پذیر باشد ترمودینامیک و چگالی حالت های این سیستم را با مساله قبلی مقایسه کنید.

حل:

$3N$ ذره داريم كه در يك بعد حركت مي كنند.

$$H=\sum_{i=1}^{3N} cP_i$$

$$Q_{3N}(V,T)=\frac{1}{(3N)!h^{3N}}\int e^{-\beta c\sum_{i=1}^{3N}P_i}\prod_{i=1}^{3N}dq_i\,dP_i$$

$$=\frac{1}{(3N)!h^{3N}}\left[\int_{\circ}^{L}dq\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta cp}dP\right]^{3N}$$

$$=\frac{L^{3N}}{(3N)!h^{3N}}\left[2\int_{\circ}^{\infty}e^{-\beta cP}dP\right]^{3N}=\frac{L^{3N}}{(3N)!h^{3N}}\left[\frac{-2}{\beta c}\left(e^{-\beta cP}\right)_{\circ}^{\infty}\right]^{3N}$$

$$=\frac{L^{3N}}{(3N)!h^{3N}}\left[2\frac{kT}{c}\right]^{3N}$$

$$Q_{3N}(V,T)=\frac{1}{(3N)!}\left[2L\frac{kT}{ch}\right]^{3N}$$

$$A=-kT\ln Q_N=kT\left[3N\ln(3N)-3N\right]-3NkT\ln\left[2L\frac{kT}{ch}\right]$$

$$S=-\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{N,V}=-k\ln(3N)!+3Nk\ln\left[2L\frac{kT}{ch}\right]+3Nk$$

$$\mu=\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T}=3kT\ln(3N)-kT\ln\left[2L\frac{kT}{ch}\right]$$

$$U=-T^2\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{A}{T}\right)\right]_{N,V}=3NkT^2\left(\frac{1}{T}\right)=3NkT$$

$$P=-\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T}=\frac{3NkT}{V}\Rightarrow PV=3NkT=U$$

۱۷-۳ اگر در معادله (۳-۵-۳) $f(p,q)$ را بصورت $[U-H(p,q)]$ در نظر بگیریم واضح است $\langle f\rangle=0$ به معنی این است که:

$$\int[U-H(p,q)]\exp(-\beta H(p,q))d\omega=0$$

با استفاده از این معادله فرمول (۳-۶-۳) را برای نوسانات انرژی یک سیستم که در آنسامبل کانونی بدست آورید.

حل:

$$\langle f\rangle=\frac{\int f(q,p)\exp(-\beta H)d\omega}{\int\exp(-\beta H)d\omega} \qquad \text{(۳-۵-۳)}$$

$$f=U-H\Rightarrow\langle f\rangle=\langle U-H\rangle=0$$

$$\int[U-H(q,p)]\exp(-\beta H)d\omega=0$$

$$\left\langle(\Delta E)^2\right\rangle=\left\langle E^2\right\rangle-\langle E\rangle^2=-\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}\right)=kT^2\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)=kT^2C_v \qquad \text{(۳-۶-۳)}$$

داریم:

$$\left\langle E^2\right\rangle-\langle E\rangle^2=\frac{\int E^2e^{-\beta E}d\omega}{\int e^{-\beta E}d\omega}-\left[\frac{\int Ee^{-\beta E}d\omega}{\int e^{-\beta E}d\omega}\right]^2$$

$$U=\frac{\int Ee^{-\beta E}d\omega}{\int e^{-\beta E}d\omega}\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial\beta}=-\frac{\int E^2e^{-\beta E}d\omega}{\int e^{-\beta E}d\omega}+\left[\frac{\int Ee^{-\beta E}d\omega}{\int e^{-\beta E}d\omega}\right]^2\quad\Rightarrow$$

$$\langle(\Delta E)^2\rangle=-\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}\right)$$

اما از نقطه نظر این مسئله

$$\int(U-H)e^{-\beta H}d\omega=\circ\ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\int(U-H)e^{-\beta H}d\omega\right]=\circ$$

$$\int\frac{\partial U}{\partial\beta}e^{-\beta H}d\omega-\int\frac{\partial H}{\partial\beta}e^{-\beta H}d\omega-\int(U-H)He^{-\beta H}d\omega$$

$$\frac{\int\frac{\partial U}{\partial\beta}e^{-\beta H}d\omega}{\int e^{-\beta H}d\omega}-\frac{\int UHe^{-\beta H}d\omega}{\int e^{-\beta H}d\omega}+\frac{\int H^2e^{-\beta H}d\omega}{\int e^{-\beta H}d\omega}=\circ$$

$$\left\langle\frac{\partial U}{\partial\beta}\right\rangle-\langle UH\rangle+\left\langle H^2\right\rangle=\frac{\partial U}{\partial\beta}-U\langle H\rangle+\left\langle H^2\right\rangle=\circ\quad\Rightarrow$$

$$\left\langle E^2\right\rangle-\langle E\rangle^2=-\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}\right)$$

۱۸-۳ نشان دهید که برای یک سیستم درآنسامبل کانونی داریم:

$$\left\langle(\Delta E)^3\right\rangle=k^2\left\{T^4\left(\frac{\partial C_v}{\partial T}\right)_v+2T^3C_v\right\}$$

بویژه برای یک گاز ایده آل داریم:

$$\left\langle \left(\frac{\Delta E}{U}\right)^2 \right\rangle = \frac{2}{3N} \quad , \quad \left\langle \left(\frac{\Delta E}{U}\right)^3 \right\rangle = \frac{8}{9N^2}$$

حل:

$$\left\langle (\Delta E)^3 \right\rangle = \left\langle (E - \langle E \rangle)^3 \right\rangle = \left\langle E^3 - 3E^2 \langle E \rangle + 3E \langle E \rangle^2 - \langle E \rangle^3 \right\rangle$$

$$= \left\langle E^3 \right\rangle - 3\left\langle E^2 \right\rangle \langle E \rangle + 2\langle E \rangle^3$$

$$U = \frac{\int E e^{-\beta E} dE}{\int e^{-\beta E} dE} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \beta} = -\frac{\int E^2 e^{-\beta E} d\omega}{\int e^{-\beta E} d\omega} + \left[\frac{\int E e^{-\beta E} d\omega}{\int e^{-\beta E} d\omega}\right]$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = \frac{\int E^3 e^{-\beta E} d\omega}{\int e^{-\beta E} d\omega} - \frac{\int E^2 e^{-\beta E} d\omega \int E e^{-\beta E} d\omega}{\left(\int e^{-\beta E} d\omega\right)^2}$$

$$-2\left(\frac{\int E e^{-\beta E} d\omega}{\int e^{-\beta E} d\omega}\right)\left(\frac{\int E^2 e^{-\beta E} d\omega}{\int e^{-\beta E} d\omega}\right) + 2\left(\frac{\int E e^{-\beta E} d\omega}{\int e^{-\beta E} d\omega}\right)\left(\frac{\int E e^{-\beta E} d\omega}{\int e^{-\beta E} d\omega}\right)^2$$

$$= \left\langle E^3 \right\rangle - \langle E \rangle^2 \langle E \rangle - 2\langle E \rangle \langle E \rangle^2 + 2\langle E \rangle \langle E \rangle^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = \left\langle E^3 \right\rangle - 3\left\langle E^2 \right\rangle \langle E \rangle + 2\langle E \rangle^3 = \left\langle (\Delta E)^3 \right\rangle$$

از طرف دیگر:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial T}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{k\beta}\right)\frac{\partial}{\partial T} = -\frac{1}{k\beta^2}\frac{\partial}{\partial T} = -kT^2 \frac{\partial}{\partial T}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}=-kT^2\frac{\partial}{\partial T}\left(-kT^2\frac{\partial}{\partial T}\right)=-kT^2\left(-2kT\frac{\partial}{\partial T}-kT^2\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right)$$

$$=k^2T^4\frac{\partial^2}{\partial T^2}+2k^2T^3\frac{\partial}{\partial T}\quad\Rightarrow$$

$$\left\langle(\Delta E)^3\right\rangle=\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2}=k^2T^4\left(\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}\right)_V+2k^2T^3\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

$$=k^2\left\{T^4\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)+2T^3C_V\right\}$$

$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

براي گاز كامل:

$$U=\frac{3}{2}NkT\quad\Rightarrow\quad C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=\frac{3}{2}Nk$$

$$\langle(\Delta E)^2\rangle=kT^2C_V=\frac{3}{2}Nk^2T^2\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\left\langle(\Delta E)^2\right\rangle}{U^2}=\left\langle\left(\frac{\Delta E}{U}\right)^2\right\rangle=\frac{\frac{3}{2}Nk^2T^2}{\left(\frac{3}{2}NkT\right)^2}=\frac{2}{3N}$$

$$\left\langle (\Delta E)^3 \right\rangle = k^2 \left\{ T^4 \left(\frac{\partial C_V}{\partial T} \right)_V + 2T^3 \times \frac{3}{2} Nk \right\} = 3Nk^3 T^3 \quad \Rightarrow$$

$$\left\langle \left(\frac{\Delta E}{U} \right)^3 \right\rangle = \frac{3Nk^3 T^3}{\left(\frac{3}{2} NT \right)^3} = \frac{3 \times 8 Nk^3 T^3}{27 Nk^3 T^3} = \frac{8}{9N^2}$$

۳-۱۹ رفتار میانگین بلند زمانی (long time average) کمیت $\frac{dG}{dt}$ را در نظر بگیرید بطوریکه $G = \sum_i p_i q_i$ و نشان دهید که اعتبار معادله (۳-۷-۵) بطور ضمنی دلالت بر اعتبار معادله (۳-۷-۶) دارد و برعکس.

حل:

$$G = \sum q_i p_i$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + [G, H]$$

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial G}{\partial t} \right\rangle + \left\langle [G, H] \right\rangle$$

چون G بستگی صریح به زمان ندارد پس $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ از طرفی میانگین زمانی بلند $(long\ time\ average)$ هر کمیتی برابر با صفر است پس:

$$\left\langle [G, H] \right\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \left\langle \sum_i \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$$

$$if \quad \left\langle \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle = 3NKT \;\Rightarrow\; \left\langle \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle = 3NKT$$

۳-۲۰ نشان دهید که براي یك سیستم آماري با انرژي پتانسیل برهمکنشي $U(r)$، بطوریکه $U(r)$ یك تابع همگن (درجه n) از مختصه هاي ذرات مي باشد براي قضیه ویریال داریم:

$$\nu = -3PV + nU$$

و همچنین براي میانگین انرژي جنبشي K داریم:

$$K = -\frac{1}{2}\nu = \frac{1}{2}(3PV + nU) = \frac{1}{(n+2)}(3PV + nE)$$

در اینجا U میانگین انرژي پتانسیل سیستم و $E = K + U$ مي باشد. توجه کنید که این نتایج نه تنها براي سیستم هاي کلاسیکي بلکه براي سیستم هاي مکانیك کوانتومي نیز برقرار هستند.

حل:

$$U(r) = A r^{n} \quad \frac{\partial U}{\partial r} = nA r^{n-1}$$

$$H = \sum_i \left[\frac{p_i^2}{2m} + U(r_i) \right]$$

$$\nu = \left\langle \sum_i q_i F_i \right\rangle = \left\langle \sum_i q_i \dot{p}_i \right\rangle + \left\langle \sum_i q_i \left(-\frac{\partial U(r_i)}{\partial r_i} \right) \right\rangle$$

$$\nu = -3NKT - \left\langle \sum_i n r_i A r_i^{n-1} \right\rangle = -3NKT - n \left\langle \sum_i A r_i^{n} \right\rangle$$

براي میانگین انرژي پتانسیل ذرات داریم.

$$U = \left\langle \sum_i A r_i^{n} \right\rangle$$

بنابراین:

$$v = -3NKT - nU$$

همچنین داریم:

$$v = \left\langle \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = -3NKT = -2K$$

که K انرژي حنبشي مي باشد.

$$K = -\frac{1}{2} v$$

$$K = -\frac{1}{2} v = \frac{1}{2}(3pV + nU) = \frac{1}{2}\left(3pV + n(E - K)\right)$$

$$K = \frac{1}{(n+2)}(3pV + nE)$$

۳-۲۱ الف) ميانگين زماني انرژي جنبشي و انرژي پتانسيل يك نوسانگر هماهنگ يك بعدي را هم بصورت كلاسيك و هم بصورت كوانتومي محاسبه كنيد و نشان دهيد كه نتايج حاصل شده با قضيه اي كه در مسأله قبل ثابت شده است با $(n=+2)$ سازگار مي باشند.

ب) اتم هيدروژن را در نظر بگيريد با $(n=-1)$ بر طبق اصل (۱) مدل بوهر زومر فيلد (۲) مدل شرودينگر ، ميانگين زماني انرژي پتانسيل و انرژي جنبشي را محاسبه كنيد.

ج) حركت سياره در ۱ مدار دايره ي ۲ مدار بيضوي را در نظر گرفته و محاسبات را تكرار كنيد.

حل:

براي نوسانگر ساده

$$K = \frac{p^2}{2m}\ ,\ K = \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

$$q = A\sin(\omega t)$$

$$p = mA\cos(\omega t)$$

$$\langle K\rangle = \frac{m^2A^2\omega^2}{2m}\frac{1}{T}\int_\circ^T \cos^2\omega t\,dt = \frac{m^2A^2\omega^2}{4m}$$

$$\langle K\rangle = \frac{1}{4}m\omega^2A^2$$

$$U = \frac{1}{T}\frac{1}{2}m\omega^2A^2\int_\circ^T \sin^2(\omega t)dt = \frac{1}{4}m\omega^2A^2$$

$$K = \frac{1}{2}(3pV + nU)$$

$$\frac{1}{2}\left(3pV + 2\frac{1}{4}m\omega^2A^2\right) = \frac{1}{4}m\omega^2A^2 \Rightarrow pV = \circ$$

بنابراين براي نوسانگر ساده $p = \circ$.

۳-۲۲ نيروي بازدارنده يك نوسانگر غير هماهنگ متناسب با جابجايي به توان ۳ است نشان دهيد كه ميانگين انرژي نوسانگر دو برابر ميانگين انرژي پتانسيل مي باشند.

حل:

$$F = -kx^3$$

$$U = \frac{1}{4}kx^4$$

براي يك تك ذره داريم:

$$H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}kx^4 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{4}kx^4$$

$$K = -\frac{1}{2}\vartheta = -\frac{1}{2}\left(\left\langle -\sum_i x_i \frac{\partial H}{\partial x_i}\right\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\left\langle x\, k\, x^3\right\rangle\right) = \frac{1}{2}\left\langle kx^4\right\rangle = 2\langle U\rangle$$

۳-۲۶ ویژه مقادیر یک نوسانگر هماهنگ s بعدی را می توان بصورت زیر نوشت:

$$E_i = (j + \frac{s}{2})\,\hbar\omega \quad j = \circ,1,2,\ldots$$

نشان دهید که j امین تراز انرژی دارای ضریب $\frac{(j+s-1)!}{j!(s-1)!}$ می باشد.

تابع پارش و خصوصیات ترمودینامیکی مهم یک سیستم شامل N نوسانگر ساده را به دست آورید فرض کنید که نوسانگر ها مستقل و تمیز پذیر هستند.
نتایج خود را با sN نوسانگر هماهنگ یک بعدی مقایسه کنید .

حل:

$$E_j = \left(j + \frac{s}{2}\right)\hbar\omega \;;\; E_{n_1,\ldots,n_s} = \left(n_1 + \ldots + n_s + \frac{s}{2}\right)\hbar\omega$$

$$E = \sum_{r=1}^{s}\left(n_r + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(\sum_{r=1}^{s} n_r + \frac{s}{2}\right)\hbar\omega$$

که داریم:

$$\sum_{r=1}^{s} n_r = j$$

s تراز داريم يعني s محل داريم و ذره بايدطوري قرار بگيرد كه جمع روي n_r برابر j شود. براي اينكار جايگشتهاي مختلفي مي تواند وجود داشته باشد. مثلاً براي يك نوسانگر

سه بعدي $n_x+n_y+n_z=j$ كه تركيبات مختلفي از n_x,n_y,n_z مجموع j را به ما مي دهد اگر اين را به صورت زير بيان كنيم كه 's محل داريم و مي خواهيم j تا جسم در آنجا قرار دهيم كه 's را نيز مي توان $s-1$ در نظر گرفت آنگاه داريم.

$$\binom{j+s'}{j}=\binom{j+s-1}{j}=\frac{(j+s-1)!}{j!(j+s-1-j)!}=\frac{(j+s-1)!}{j!(s-1)!}$$

براي يك ذره:

$$g(E)=\sum_{j=\circ}^{\infty}\binom{j+s'-1}{j}\delta\left(E-\left(j+\frac{s}{2}\right)\hbar\omega\right)$$

$$=e^{-\beta\frac{s}{2}\hbar\omega}\sum_{j=\circ}^{\infty}\frac{(j+s-1)!}{j!(s-1)!}e^{-\beta j\hbar\omega}$$

$$Q_1(\beta,s)=\int_{\circ}^{\infty}e^{-\beta E}g(E)\,dE=\sum_{j=\circ}^{\infty}g_i\,e^{-\beta\left(j+\frac{s}{2}\right)\hbar\omega}$$

$$=\sum_{j=\circ}^{\infty}e^{\frac{-\beta s}{2}\hbar\omega}\frac{(j+s-1)!}{j!(s-1)!}e^{-\beta j\hbar\omega}\quad\Rightarrow$$

$$Q_1(\beta,s)=e^{\frac{-\beta\hbar\omega}{2}}\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)^{-s}$$

$$Q_1(\beta)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)^{s}}\quad\Rightarrow$$

$$Q_N = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega sN}\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)^{-Ns} = sN\,\frac{\hbar\omega}{2}$$

$$A = -kT\,\ln Q_N = \frac{1}{2}kT\,\beta\hbar\omega sN + kTNs\,\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

$$= sN\,\frac{\hbar\omega}{2} + sNkT\,\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T} = \frac{s\hbar\omega}{2} + skT\,\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

$$P = \left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{N,T} = \circ$$

$$S = -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{N,T} = -\left[sNk\,\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right) + \left(sN\right)kT\,\frac{k\beta\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)}\right]$$

$$S = -sNk\,\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right) - sNk\hbar\omega\frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)}$$

برای sN نوسانگر یک بعدی داریم.

$$Q_1(\beta) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)}{1-\exp\left(-\beta\hbar\omega\right)}$$ -۸-۳)

(۱۴

$$Q_{sN}(\beta) = \frac{\exp\left(-\frac{sN}{2}\beta\hbar\omega\right)}{\left[1-\exp\left(-\beta\hbar\omega\right)\right]^{sN}}$$

كه همانطور كه ملاحظه مي شود با تابع پارش كه در قسمت الف محاسبه كرده ايم برابراست، بنابراين بقيه خصوصيات ترموديناميكي سيستم نيز يكي هستند يعني اينكه N تا نوسانگر s بعدي معادل با sN تا نوسانگر تك بعدي مي باشد.

۳-۲۷ يک عبارت مجانبی برای کميت $\ln g(E)$ يک سيستم از N نوسانگر هماهنگ کوانتم مکانيکی با استفاده از معکوس فرمول (۳-۴-۷) و تابع پارش (۳-۸-۱۵) بدست آوريد سپس نشان دهيد که:

$$\frac{S}{Nk}=(\frac{E}{N\hbar\omega}+\frac{1}{2})\ln(\frac{E}{\hbar\omega N}+\frac{1}{2})-(\frac{E}{N\hbar\omega}-\frac{1}{2})\ln(\frac{E}{N\hbar\omega}-\frac{1}{2})$$

راهنمايی: از روش داروينگ، فائولر استفاده کنيد.

حل:

$$Q_N=e^{-\frac{N}{2}\beta\hbar\omega}\left\{1-e^{-\beta\hbar\omega}\right\}^{-N}$$

$$g(E)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta'-i\infty}^{\beta'+i\infty}e^{\beta E}Q(\beta)\,d\beta \qquad \beta'>0$$

$$g(E)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta'-i\infty}^{\beta'+i\infty}e^{\beta E}e^{\frac{-N}{2}\hbar\omega\beta}\left\{1-e^{-\beta\hbar\omega}\right\}^{-N}d\beta=A$$

$$g(E)=\frac{\left(\frac{E}{N\hbar\omega}+\frac{1}{2}\right)^{N\left(\frac{E}{N\hbar\omega}+\frac{1}{2}\right)}}{\left(\frac{E}{N\hbar\omega}-\frac{1}{2}\right)^{N\left(\frac{E}{N\hbar\omega}-\frac{1}{2}\right)}}$$

$$S = k\ln g(E) = k\ln A$$

$$\frac{S}{Nk} = \left(\frac{E}{N\hbar\omega}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{E}{N\hbar\omega}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{E}{N\hbar\omega}-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{E}{N\hbar\omega}-\frac{1}{2}\right)$$

۳-۲۸ الف) وقتی یک سیستم N نوسانگری با انرژی کل E در حالت تعادل گرمایی است احتمال P_n که یکی از این نوسانگر ها در بین آنها در حالت کوانتمی n باشد چیست؟ (راهنمایی از فرمول (۳-۵-۱۶) استفاده کنید.)
تحقیق کنید که

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} p_n = 1$$

ب) وقتی یک گاز ایده آل شامل N مولکول تک اتمی با انرژی کل E درحالت تعادل گرمایی است نشان دهید که احتمال اینکه یک مولکول مفروض یک انرژی در همسایگی ε داشته باشد متناسب با: $\exp(-\beta\varepsilon)$
راهنمایی از رابطه (۳-۵-۱۶) استفاده کنید.
و فرض کنید$N>>1$ و $\varepsilon << E$ مي باشد.

حل:

$$E_1=\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n_1=\circ,1,2,\ldots$$

$$E_2=\left(n_2+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n_2=\circ,1,2,\ldots$$

$$E = E_1+E_2+E_1+\ldots=\left(n_1+n_2+n_3+\ldots+n_N+\frac{N}{2}\right)\hbar\omega$$

$$=R\hbar\omega+\frac{N\hbar\omega}{2}$$

R تعداد کل $\hbar\omega$ هاست. اگر يك ذره در حالت کوانتومي n باشد انرژي آن برابر است با $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ بنابراين $N-1$ ذره داريم که مي خواهيم انرژي E' را بين آنها توزيع کنيم.

$$E'=E-E_n \;,\; E=\sum_{i=1}^{N}\left(n_i+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega=\sum_{i=1}^{N}n_i\hbar\omega+\frac{N\hbar\omega}{2}=R\hbar\omega+\frac{N\hbar\omega}{2}$$

$$E'=R\hbar\omega+\frac{1}{2}N\hbar\omega-n\hbar\omega-\frac{1}{2}\hbar\omega=(R-n)\hbar\omega+\frac{1}{2}(N-1)\hbar\omega$$

تعداد راههايي که مي توان انرژي E را بين N ذره توزيع نمود:

$$\omega=\frac{(R+N-1)!}{R!(N-1)!}$$

(۱)

تعداد راههايي که مي توان انرژي E' را بين $N-1$ ذره توزيع نمود برابر است با:

اگر در رابطه (۱) قرار دهيم:
$R\to R-n \quad , \quad N\to N-1$

$$\Rightarrow \quad \omega'=\frac{\left[(R-n)+(N-1-1)\right]!}{(R-n)!(N-1-1)!}$$

$$P_n=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{\dfrac{(R-n+N-2)!}{(R-n)!(N-2)!}}{\dfrac{(R+N-1)!}{R!(N-1)!}} \quad \Rightarrow$$

$$P_n=\frac{R!(N-1)!(R-n+N-2)!}{(R+N-1)!(R-n)!(N-2)!}=\frac{R!(N-1)!(N-2)!(R-n+N-2)!}{(R-N-1)!(R-n)!(N-2)!}$$

$$=\frac{R(R-1)\ldots(R-n)!(R-n+N-2)!(N-1)}{(R+N-1)!(R-n)!}$$

$$=\frac{R(R-1)\ldots\ldots(R-n-1)(R+N-1-(n-1))!(N-1)}{(R+N-1)(R+N-1-1)\ldots\ldots(R+N-1-(n-1-1))(R+N-1-1)}$$

$$=\frac{R(R-1)\ldots\ldots(R-n+1)(N-1)}{(R+N-1)\ldots\ldots(R+N-1-n)}$$

اگر $R>>n, N>>1$ آنگاه داریم:

$$P_n=\frac{R^nN}{(R+N)^{n+1}}=\frac{N}{(R+N)}\left(\frac{R}{R+N}\right)^n$$

حال نشان مي دهيم که:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}P_n=1$$

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{N}{(R+N)}\left(\frac{R}{R+N}\right)^n=\frac{N}{(R+N)}\frac{1}{1-\frac{R}{R+N}}=\frac{N}{R+N}\frac{R+N}{R+N-R}=1$$

۲۹-۳ انرژی پتانسیل یک نوسانگر غیر هماهنگ یک بعدی را می توان بصورت زیر نوشت:

$$V(q)=cq^2-gq^3-fq^4$$

که f,g,c ثابت های مثبتی هستند البته g,f مقادیر بسیار کوچکی فرض شده اند. نشان دهید که در

اولـین مرتـبه، سهم عبـارتهای غیرهـارمونـیک در گـرمـای ویـژه سیستم بـا رابطه زیـر داده می شود:

$$\frac{3}{2}k^2\left(\frac{f}{c^2}+\frac{5}{4}\frac{g^2}{c^3}\right)T$$

و بـرای همان مرتـبه، مقـــدار میـــانـگین مختـــصه مـکانـی q بـا رابطه زیـر داده می شود.

$$\langle q\rangle=\frac{3}{4}\frac{gkT}{c^2}$$

حل:

$$V(q)=Cq^2-gq^3-fq^4 \quad \Rightarrow$$

$$H=\frac{P^2}{2m}+Cq^2-gq^3-fq^4$$

$$C_P=C_v=k\beta^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(\ln Q)\right\}_{N,V}$$

$$Q=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta\left(\frac{P^2}{2m}+Cq^2-gq^3-fq^4\right)}dpdq \quad \Rightarrow$$

$$Q=\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta h^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta\left(Cq^2-gq^3-fq^4\right)}dq$$

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha y^2}y^n dy=\begin{cases}0 & \text{اگر } n \text{ فرد} \\ \frac{1}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}}\Gamma\frac{n+1}{2}, & n>-1\end{cases}$$

$$Q=\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta h^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta Cq^2}\left[1+\beta\left(gq^3+fq^4\right)+\frac{\beta^2}{2}\left(g^2q^6+f^2q^8\right)+\cdots\right]\Rightarrow$$

$$Q=\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta h^2}}\times\sqrt{\frac{\pi}{\beta c}}\left[1+\frac{3f}{4}-\frac{1}{\beta c^2}+\frac{15}{16}\frac{g^2}{\beta c^3}+\frac{105}{32}\frac{f^2}{\beta^2 c^4}+\cdots\right]$$

$$C_{\text{v}}=k\beta^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(\ln Q)\right\}$$

$$=k+k\left(32c^3\beta^2\right)\left(12fc+15g^2\right)\left(16c^3\beta^{-2}\right)^{-2}\Rightarrow$$

$$C_{\text{v}}=k\left\{1+\frac{12fc+15g^2}{8\beta c^3}\right\}=k+k^2T\,\frac{3}{2}\left[\frac{f}{c^2}+\frac{5}{4}\frac{g^2}{c^3}\right]$$

در اینجا ما دو مرتبه از کوچکترین توانهای g و f را نگه می داریم.

اولین مرتبه به این شکل به دست می آید:

$$\langle q\rangle=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\beta\frac{P^2}{2m}\right)dp\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\beta cq^2\right)}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\beta\frac{P^2}{2m}\right)dp\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\beta cq^2\right)}$$

$$\times\frac{\left[1+\beta\left(gq^3+fq^4+\cdots\right)\right]q\,dq}{\left[1+\beta\left(gq^3+fq^4+\cdots\right)\right]dq}$$

$$\langle q \rangle = \frac{\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\beta c q^2\right) \beta g q^4 dq}{\sqrt{\frac{2m\pi^2}{\beta^2 c}}} = \frac{3}{4}\frac{g}{\beta c^2} = \frac{3}{4} g \frac{kT}{c^2}$$

۳۰-۳ ترازهای انرژی یک نوسانگر غیر هماهنگ کوانتم مکانیکی یک بعدی را می توان بصورت زیر تقریب زد:

$$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega - x(n+\frac{1}{2}) \quad n = \circ, 1, 2, \ldots$$

پارامتر x که معمولا خیلی کوچکتر از یک می باشد $(x << 1)$ نشان دهنده درجه غیرهماهنگی است نشان دهید که برای اولین مرتبه از x و چهارمین مرتبه از $u = \left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)$، گرمای ویژه یک سیستم شامل N نوسانگر بصورت زیر داده می شود :

$$C = Nk\left[(1 - \frac{1}{12}u^2 + \frac{1}{24\circ}u^4) + 4x(\frac{1}{u} + \frac{1}{8\circ}u^2)\right]$$

توجه کنید که جمله تصحیحی با دما افزایش می یابد.

حل:

$$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega - x(n+\frac{1}{2})^2\hbar\omega \quad , \quad n = \circ, 1, 2, \ldots \ , \ x << 1$$

$$Q_1 = \sum_{n=\circ}^{\infty} \exp\left[-\beta\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \beta x\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \hbar\omega\right]$$

اگر فرض کنیم $u = \beta\hbar\omega$، بنابراین:

$$Q_1 = \sum_{n=\circ}^{\infty} \exp\left[ux\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right] \exp\left[-u\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\cong \sum_{n=\circ}^{\infty}\left[1+ux\left(n\frac{1}{2}\right)^2\right]\exp\left[-u\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\sum_{n=\circ}^{\infty}\exp\left[-u\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]+\sum_{n=\circ}^{\infty}ux\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\exp\left[-u\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\sum_{n=\circ}^{\infty}\exp\left[-u\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]+xu\,\frac{\partial^2}{\partial u^2}\sum_{n=\circ}^{\infty}\exp\left[-u\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}\exp\left[-u\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2\sinh\frac{u}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$Q_1=\frac{1}{2\sinh\frac{u}{2}}+xu\,\frac{\partial^2}{\partial u^2}\frac{1}{2\sinh\frac{u}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sinh\frac{u}{2}}+\frac{xu}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-\cosh\frac{u}{2}}{2\sinh^2\frac{u}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sinh\frac{u}{2}}+\frac{1}{2}xu\left(\frac{-\sinh^3\frac{u}{2}+2\sinh\frac{u}{2}\cosh^2\frac{u}{2}}{\sinh^4\frac{u}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sinh\frac{u}{2}}+\frac{1}{2}xu\left(\frac{-1}{\sinh\frac{u}{2}}+\frac{2\cosh^2\frac{u}{2}}{\sinh^3\frac{u}{2}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$Q_N=\left[\frac{1}{2\sinh\frac{u}{2}}+\frac{1}{2}xu\left(\frac{-1}{\sinh\frac{u}{2}}+\frac{2\cosh^2\frac{u}{2}}{\sinh^3\frac{u}{2}}\right)\right]^N$$

$$=\left[\frac{1}{2\sinh\frac{u}{2}}\left\{1-xu\left(1-2\cot gh^2\frac{u}{2}\right)\right\}\right]^N\quad\Rightarrow$$

$$\ln Q_N=N\left[-\ln\left(2\sinh u\right)+\ln\left\{1-xu\left(1-2\cot gh^2\frac{u}{2}\right)\right\}\right]$$

$$C_v=k\beta^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln Q_N=k\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\ln Q_N$$

$$=k\beta^2\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial u}\right)\ln Q_N\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial\beta}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial u\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2}\right]\qquad u=\beta\hbar\omega$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\partial u}{\partial\beta}=\hbar\omega=\frac{u}{\beta}$$

$$C_v=k\beta^2\left[\frac{\hbar\omega}{\beta}\frac{\partial}{\partial u}+\left(\hbar\omega\right)^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}\right]\ln Q_N$$

$$=ku\frac{\partial \ln Q_N}{\partial u}+ku^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}\ln Q_N$$

$$\frac{\partial \ln Q_N}{\partial u}=\frac{-\cosh\frac{u}{2}}{\sinh\frac{u}{2}}+\frac{-x\left(1-2\cot gh^2\frac{u}{2}\right)+4xu\frac{\cot gh\frac{u}{2}}{\sinh^2\frac{u}{2}}}{1-xu\left(1-2\cot gh^2\frac{u}{2}\right)}$$

$$x<<1 \;\Rightarrow\; 1-ux(1-\cot g\,\mathrm{h}^2\frac{u}{2})\simeq 1$$

$$\frac{\partial^2 \ln Q_N}{\partial u^2}=-\left(1-2\cot gh^2\frac{u}{2}\right)+x\left(\frac{4u}{\sinh^2\frac{u}{2}}-\frac{12u\cot gh^2\frac{u}{2}}{\sinh^2\frac{u}{2}}\right)$$

$$C_V\cong Nku\left\{-\frac{1}{2}\cot gh\frac{u}{2}-x\left(1-2\cot gh^2\frac{u}{2}\right)+4xu\frac{\cot gh\frac{u}{2}}{\sinh^2\frac{u}{2}}\right\}$$

$$+Nku^2\left\{-1+\cot gh^2\frac{u}{2}+x\left(\frac{-4u}{\sinh^2\frac{u}{2}}+\frac{6u\cot gh\frac{u}{2}}{\sinh\frac{u}{2}}\right)\right\}$$

در اینجا $\cot gh\frac{u}{2}$ و $\sinh\frac{u}{2}$ را برحسب u بسط می‌دهیم، پس از مقداری محاسبه نتیجه نهایی به دست می‌آید.

۳-۳۱ در امتداد مطالب بخش ۳-۸ مکانیک آماری سیستمی شامل N نوسانگر فرمی که بوسیله دو ویژه مقدار ε,۰ مشخص شده اند را مطالعه کنید.

حل:

$$Q_1=\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}=1+e^{-\beta\varepsilon}$$

$$Q_N=\left[Q_1\right]^N=\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)^N$$

$$A=-kT\,\ln Q_N=-NkT\,\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)$$

$$\mu=\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T}=Nk\,\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)$$

$$S=-\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{N,V}=Nk\,\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon}\right)+\frac{N}{T}\frac{\varepsilon}{1+e^{-\beta\varepsilon}}$$

۳-۳۲ حالت های کوانتمی قابل دسترس برای یک سیستم فیزیکی معلوم عبارتند از:

الف- یک گروه با g_1 حالت با احتمال مساوی و مقدار انرژی مشترک ε_1

ب- یک گروه با g_2 حالت با احتمال مساوی و مقدار انرژی مشترک ε_2

نشان دهید که آنتروپی سیستم با رابطه زیر داده می شود:

$$s=-k\left[P_1\ln\left(\frac{P_1}{g_1}\right)+P_2\ln\left(\frac{P_2}{g_2}\right)\right]$$

که P_2, P_1 به ترتیب احتمالات اینکه سیستم در حالتي متعلق به گروه ۱ یا گروه ۲ است مي باشند بطوریکه:

$$P_1+P_2=1$$

الف) فرض کنید که Pها بوسیله یک توزیع کانونی داده شده باشند، نشان دهید که:

$$\acute{S}=k\left[\ln g_1+\ln\left\{1+\left(\frac{g_2}{g_1}\right)e^{-x}\right\}+\frac{x}{1+\left(\frac{g_1}{g_2}\right)e^{x}}\right]$$

که درآن $x=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{kT}$ مثبت فرض شده است حالت خاص $g_1=g_2=1$ را با نوسانگر فرمی مساله قبل مقایسه کنید.

ب) عبارت فوق برای آنتروپی S را با استفاده از تابع پارش سیستم بدست آورید.

ج) بررسی کنید که وقتی $T\to\circ$ آنگاه $S\to k\ln g_1$ این نتایج را تفسیر فیزیکی کنید.

حل:

فرض مي‌کنیم دو مجموعه تراز انرژي داریم که میانگین انرژي در یکي از آنها E_1 و دیگري E_2 است و تمام ترازها متساوي الاحتمال هستند. در آن صورت احتمال اینکه سیستم در هر کدام از ترازهاي g_1 یا g_2 با انرژي E_1 یا E_2 باشد عبارت است از:

$$P'_i=\frac{P_1}{g_1}\quad,\quad i=1,2,\ldots$$

$$P'_j=\frac{P_2}{g_2}\quad,\quad j=1,2,\ldots$$

$$P_i' g_i + P_j' g_j = 1$$

$$S = -k \sum P_r \ln P_r$$

$$S = -k \sum_{i=1}^{g_1} P'_i \ln P'_i - k \sum_{j=1}^{g_2} P'_j \ln P'_j$$

چون متساوي الاحتمال هستند:

$$S = -\left\{ k g_1 P'_i \ln P'_i + k g_2 P'_j \ln P'_j \right\}$$

$$= -k \left\{ g_1 \frac{P_1}{g_1} \ln \left(\frac{P_1}{g_1} \right) + g_2 \frac{P_2}{g_2} \ln \left(\frac{P_2}{g_2} \right) \right\}$$

$$S = -k \left\{ P_1 \ln \left(\frac{P_1}{g_1} \right) + P_2 \ln \left(\frac{P_2}{g_2} \right) \right\}$$

$$P_1 = \frac{g_1 e^{-\beta E_1}}{g_1 e^{-\beta E_1} + g_2 e^{-\beta E_2}} = \frac{g_1 e^{-\beta E_1}}{g_1 e^{-\beta E_1} \left(1 + \frac{g_2}{g_1} e^{-\beta (E_2 - E_1)} \right)} = \frac{\frac{g_2}{g_1} e^{-x}}{1 + \frac{g_2}{g_1} e^{-x}}$$

$$P_2 = \frac{g_2 e^{-\beta E_2}}{g_1 e^{-\beta E_1} + g_2 e^{-\beta E_2}} = \frac{\frac{g_2}{g_1} e^{-\beta (E_2 - E_1)}}{1 + 1 + \frac{g_2}{g_1} e^{-\beta (E_2 - E_1)}} = \frac{\frac{g_2}{g_1} e^{-x}}{1 + \frac{g_2}{g_1} e^{-x}}$$

$$\ln P_1 = -\ln \left(1 + \frac{g_2}{g_1} e^{-x} \right) \quad \Rightarrow$$

$$l\,\mathrm{n}\frac{P_1}{g_1}=\ln P_1-\ln g_1=-\ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right)-\ln g_1$$

$$\ln P_2=\ln g_2-\ln g_1-x-\ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right)$$

$$\ln\frac{P_2}{g_2}=-\ln g_1-x-\ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right)$$

$$S=-k\left\{\frac{1}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}\left(-\ln g_1-\ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}\left(-\ln g_1-x-\ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right)\right)\right\}$$

$$S=-k\left\{\frac{-\ln g_1}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}-\frac{\ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right)}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}-\frac{\ln g_1\times\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}\right.$$

$$\left.-\frac{x\,\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}-\frac{\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right)}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}\right\}$$

$$S = -k\left\{ -\ln g_1 \left(\frac{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}} \right) - \ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right)\left(\frac{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}} \right) - \frac{x\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}} \right\}$$

$$S = k\left\{ \ln g_1 + \ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right) + \frac{x\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}{\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\left(1+\frac{g_1}{g_2}e^{+x}\right)} \right\}$$

$$S = k\left\{ \ln g_1 + \ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right) + \frac{x}{1+\frac{g_1}{g_2}e^{+x}} \right\}$$

$$if \quad g_1 = g_2 = 1$$

$$\Rightarrow S = k\left\{ \ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right) + \frac{x}{1+e^{+x}} \right\}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \circ \\ \frac{E}{kT} = x \end{cases}$$

همانطور که دیده مي‌شود در این مورد آنتروپي با آنتروپي یك توسانگر فرمي که در مساله (۳-۲۶) محاسبه شده است، یکسان مي‌باشد.

$$Q=\sum_r g_r e^{\beta E_r}=g_1 e^{-\beta E_1}+g_2 e^{\beta E_2}=g_1 e^{-\beta E_1}\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right) \quad , \quad x=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{kT}$$

$$\ln Q=\ln g_1-\beta E_1+\ln\left(1+\frac{g_1}{g_2}e^{-x}\right)$$

$$A=-kT\ \ln Q$$

$$A=-kT\left[\ln g_1-\beta E_1+\ln\left(1+\frac{g_1}{g_2}e^{-x}\right)\right]$$

$$S=-\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{N,V}=k\ \ln Q+kT\ \frac{\partial \ln Q}{\partial T}$$

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial T}=-\frac{1}{kT^2}\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta}=-k\beta^2\left\{-E_1-\frac{g_2}{g_1}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)e^{-x}}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}\right\}$$

$$S=k\left[\ln g_1-\beta E_1+\ln\left(1+\frac{g_1}{g_2}e^{-x}\right)\right]+kT\left(\frac{-1}{kT^2}\right)\left[-E_1-\frac{g_2}{g_1}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)e^{-x}}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}\right]$$

$$S=k\left[\ln g_1-\beta E_1-\ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right)+\frac{1}{kT}\left(E_1+\frac{\frac{x}{\beta}\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}{1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}}\right)\right]$$

$$S=k\left[\ln g_1+\ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right)+\frac{x\,\dfrac{g_2}{g_1}e^{-x}}{1+\dfrac{g_2}{g_1}e^{-x}}\right]$$

$$S=k\left[\ln g_1+\ln\left(1+\frac{g_2}{g_1}e^{-x}\right)+\frac{x}{1+\dfrac{g_2}{g_1}e^{+x}}\right]$$

كه با جوابي كه قبلاً به دست آورديم يكي است.

ج) همه ذرات به تراز پايين مي‌روند.

$T\to 0 \qquad S=k\ln g_1$

۳-۳۵ یک سیستم گازی شامل N مولکول دواتمی غیر برهم کنشی که هر کدام دارای گشتاورد دو قطبی الکتریکی μ، در یک میدان الکتریکی خارجی با شدت E در نظر بگیرید:

انرژی هر مولکول با انرژی جنبشی چرخشی همین طور انرژی جنبش انتقالی بعلاوه انرژی پتانسیل جهت گیری در میدان اعمال شده، بدست می آید:

$$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}+\left\{\frac{p_\theta^{\,2}}{2I}+\frac{p_\varphi^{\,2}}{2I\sin^2\theta}\right\}-\mu E\cos\theta$$

که I ممان اینرسی مولکول می باشد. ترمودینامیک این سیستم شامل پلاریزاسیون الکتریکی و ثابت دی الکتریک را به دست آورید.
فرض کنید که سیستم کلاسیکی است و اینکه

$|\mu E| << kT$ *

مولکول H_2O دارای یک ممنتم دو قطبی الکتریکی به اندازة $1.85\times10^{-18}esu$ می باشد طبق تئوری قبلی ثابت دی الکتریک یک بخار در دمای $100c^\circ$ و فشار اتمسفر را محاسبه کنید .

حل:

$$\varepsilon=\frac{P^2}{2m}+\left\{\frac{P_\theta^2}{2I}+\frac{P_c^2}{2I\sin^2\theta}\right\}-\mu E\cos\theta$$

در اینجا μ دو قطبي الكتريكي و E ميدان الكتريكي مي باشد.

$$\Rightarrow Q_1=\frac{1}{h^5}\int dq\int_\circ^\infty \exp\left(\frac{-\beta P^2}{2m}\right)4\pi P^2 dP\int_{-\infty}^\infty \exp\left(\frac{-\beta P_\theta^2}{2I}\right)dP_\theta\int_\circ^{2\pi}d\varphi$$

$$\times\int_\circ^\pi d\theta\, e^{-\beta\mu E\cos\theta}\sin\theta\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{-\beta P_\varphi^2}{2I\sin^2\theta}}dP_\varphi \quad\Rightarrow$$

$$\int_\circ^\infty \exp\left(\frac{-\beta P^2}{2m}\right)4\pi P^2 dP$$

$$I_n=\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha y^2}y^n dy=\begin{cases}\circ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد}\\ \dfrac{1}{\alpha^{\frac{n+1}{2}}}\Gamma\dfrac{n+1}{2} & n>-1\end{cases}$$

$$=4\pi\frac{d}{d\left(\frac{-\beta}{2m}\right)}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(\frac{-\beta P^2}{2m}\right)dP\right)=2\pi\frac{d}{d\left(\frac{-\beta}{2m}\right)}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\frac{\beta}{2m}}}\right)$$

$$=\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \exp\left(\frac{-\beta P_\theta^2}{2I}\right)dP_\theta=\sqrt{\frac{2\pi I}{\beta}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-\beta P_{\varphi}^{2}}{2I\sin^{2}\theta}\right) dP_{\varphi} = \sqrt{\frac{2\pi I}{\beta}}\,\sin\theta$$

$$\int_{\circ}^{\pi} d\theta e^{-\beta\mu E\cos\theta}\sin^{2}\theta = \int_{\circ}^{\pi} d\theta\sin^{2}\theta\left(1-\beta\mu E\cos\theta+\frac{1}{2}\beta^{2}\mu^{2}E^{2}\cos^{2}\theta+\cdots\right)$$

$$|\mu E| << kT \;\Rightarrow\; \frac{|\mu E|}{kT} << 1$$

بنابراین در انتگرال بالا می توان از جملاتی که دارای توان بالاتری از $\beta\mu E$ هستند صرفنظر کرد.

$$\int_{\circ}^{\pi} d\theta\sin^{2}\theta-\beta\mu E\int_{\circ}^{\pi}\sin^{2}\theta\cos\theta d\theta+\frac{1}{2}\beta^{2}\mu^{2}E^{2}\int_{\circ}^{\pi}\sin^{2}\theta\cos^{2}\theta d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\beta^{2}\mu^{2}E^{2}\times\frac{\pi}{8}$$

$$Q_{1}=\frac{4\pi^{3}\sqrt{\pi}VI}{h^{5}\beta}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{16}\beta^{2}\mu^{2}E^{2}\right)\sin\theta$$

چون سیستم گاز دو اتمی کلاسیکی فرض شده است. بنابراین ذرات آن تمیز ناپذیرند.

$$Q_{N}=\left(Q_{1}\right)^{N}=\left[\frac{2\pi^{2}\sqrt{\pi}VI}{h^{5}\beta}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{8}\beta^{2}\mu^{2}E^{2}\right)\sin\theta\right]^{N}$$

$$A=-kT\ln Q_{N}=-kTN\ln\left[\frac{\pi^{3}\sqrt{\pi}VI}{h^{5}\beta}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{8}\beta^{2}\mu^{2}E^{2}\right)\right]\sin\theta \;\Rightarrow$$

$$\mu=-\left(\frac{\partial A}{\partial E}\right)=kTN\left(\frac{\frac{1}{4}\beta^2\mu^2E}{1+\frac{1}{8}\beta^2\mu^2E^2}\right)\sin\theta$$

بنابراین گشتاور دو قطبي در واحد حجم یا قطبش برابر است با:

$$P=\frac{\mu}{V}=\frac{kTN}{4V}\left(\frac{\beta^2\mu^2E}{1+\frac{1}{8}\beta^2\mu^2E^2}\right)\sin\theta$$

با توجه به رابطه $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$ داریم:

$$P=\chi E\ \ ,\ P=\frac{kTN}{4V}\beta^2\mu^2E\left(1-\frac{1}{8}\beta^2\mu^2E^2\right)\cong\frac{kTN}{4V}\beta^2\mu^2E$$

ثابت دی الکتریک:

$$\Rightarrow\chi=\frac{N\mu^2}{4VkT}$$

$$\varepsilon=\varepsilon_\circ+\chi=\varepsilon_\circ+\frac{N\mu^2}{4VkT}$$

فصل 4

۴-۱

حل:

مي دانيم كه:

$$P_{r,s}=\frac{e^{-\alpha N_r-\beta E_s}}{\sum_{r,s}e^{-\alpha N_r-\beta E_s}}$$

از طرفين ln مي‌گيريم بنابراين داريم:

$$\ln P_{r,s}=-\alpha N_r-\beta E_s-\ln\sum_{r,s}e^{-\alpha N_r-\beta E_s}$$

$$q=\ln\sum_{r,s}e^{-\alpha N_r-\beta E_s}$$

$$\ln P_{r,s}=-\alpha N_r-\beta E_s-q$$

طرفين اين رابطه را در $P_{r,s}$ ضرب كرده و روي r, s جمع مي بنديم.

$$\sum_{r,s}P_{r,s}\ln P_{r,s}=-\alpha\sum_{r,s}P_{r,s}\overline{N}_r-\beta\sum_{r,s}P_{r,s}E_s-q\sum_{r,s}P_{r,s}$$

$$\sum_{r,s}P_{r,s}\ln P_{r,s}=-\alpha\overline{N}-\beta\overline{E}-q=-\left(\alpha\overline{N}+\beta\overline{E}+q\right)$$

به جاي q از رابطه (۴-۳-۹) استفاده مي‌كنيم بنابراين:

$$S=-k\sum_{r,s}P_{r,s}\ln P_{r,s}$$

۳-۴

حل:

الف) احتمال اينكه يك مولكول در حجم V از حجم كل $V_\circ$ قرار گيرد برابر است با:

$$p(1,V)=\frac{V}{V_\circ}$$

$$P(N,V)=\frac{N^{(\circ)}!}{N!\left(N^{(\circ)}-N\right)!}\left(\frac{V}{V_\circ}\right)^N\left(1-\frac{V}{V_\circ}\right)^{N^{(\circ)}-N}$$

احتمال قرار نگرفتن در V :

$$q=1-\frac{V}{V_\circ}=1-p$$

بايد

$$\sum_{N=\circ}^{N^{(\circ)}}p(N,V)=1$$

$$\sum_{N=\circ}^{N^{(\circ)}}\frac{N^{(\circ)}!}{N!\left(N^{(\circ)}-N\right)!}p^N(1-p)^{N^{(\circ)}-N}$$

$$=\left(p+(1-p)\right)^{N^{(\circ)}}=1^N=1$$

$$\langle N\rangle=\sum_{N=\circ}^{N^{(\circ)}} NP(N,V)=\sum N\frac{N^{(\circ)}!}{N!\left(N^{(\circ)}-N\right)!}p^N q^{N^{(\circ)}-N}$$

$$=\sum_{N=\circ}^{N^{(\circ)}}\frac{N^{(\circ)}!}{N!\left(N^{(\circ)}-N\right)!}p\frac{\partial}{\partial p}p^N q^{N^{(\circ)}-N}$$

$$=p\frac{\partial}{\partial p}\sum_{N=\circ}^{N^{(\circ)}}\frac{N^{(\circ)}!}{N!\left(N^{(\circ)}-N\right)!}p^N q^{N^{(\circ)}-N}=p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^{N^{(\circ)}}$$

$$=pN^{(\circ)}(p+q)^{N^{(\circ)}-1}=pN^{(\circ)}$$

ب)

$$\langle N^2\rangle=\sum N^2\frac{N^{(\circ)}!}{N!\left(N^{(\circ)}-N\right)!}p^N q^{N^{(\circ)}-N}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}p^N=N^2p^{N-2}-Np^{N-2}=N(N-1)p^N \quad , \quad N^2p^N=p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}p^N+Np^N$$

$$\langle N^2\rangle=\sum_{N=\circ}^{N^{(\circ)}}\frac{N^{(\circ)}!}{N!\left(N^{(\circ)}-N\right)!}p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}p^N+\sum_{N=\circ}^{N^{(\circ)}}\frac{N^{(\circ)}!}{N!\left(N^{(\circ)}-N\right)!}Np^N q^{N^{(\circ)}-N}$$

$$=p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}(p+q)^{N^{(\circ)}}+pN^{(\circ)}=p^2N^{(\circ)}\left(N^{(\circ)}-1\right)+pN^{(\circ)}$$

$$\langle N^2\rangle-\langle N\rangle^2=p^2N^{(\circ)2}-p^2N^{(\circ)}-p^2N^{(\circ)2}=pN^{(\circ)}(1-p)$$

ج)

$$\left(\overline{\Delta N}\right)=\left[pN^{(\circ)}(1-p)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$p(N,V)=\frac{N^{(\circ)}!}{N!\left(N^{(\circ)}-N\right)!}p^{N}q^{N^{(\circ)}-N}$$

$$\ln p=\ln N^{(\circ)}!-\ln N!-\ln\left(N^{(\circ)}-N\right)!+N\ln p+\left(N^{(\circ)}-N\right)\ln q$$

$$p=\exp\{N^{(\circ)}\ln N^{(\circ)}-N\ln N-\left(N^{(\circ)}-N\right)\ln\left(N^{(\circ)}-N\right)$$

$$+N\ln p+\left(N^{(\circ)}-N\right)\ln q\}$$

$$f(N)=N^{(\circ)}\ln N^{(\circ)}-\left(N^{(\circ)}-N\right)\ln\left(N^{(\circ)}-N\right)-N\ln N$$

$$+N\ln p+\left(N^{(\circ)}-N\right)\ln q$$

$$f(N)=f(\overline{N})+\left.\frac{\partial f(N)}{\partial N}\right|_{N=\overline{N}}(N-\overline{N})+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f(N)}{\partial N^2}\right|_{N=\overline{N}}(N-\overline{N})^2+\dots$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial N}\right|_{N=\overline{N}}=-\ln\overline{N}+\ln\left(N^{(\circ)}-\overline{N}\right)+\ln p-\ln q$$

اما مي دانيم كه

$$\overline{N}=pN^{(\circ)}$$

بنابر اين

$$\left.\frac{\partial f}{\partial N}\right|_{N=\overline{N}}=-\ln\overline{N}+\ln N^{(\circ)}(1-p)+\ln p-\ln q$$

$$=-\ln pN^{(\circ)}+\ln N^{(\circ)}+\ln\left(1-p\right)+\ln p-\ln q=\circ$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f}{\partial N}\right|_{N=\overline{N}}=\circ$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial N^2}\right|_{N=\overline{N}}=-\frac{1}{\overline{N}}-\frac{1}{N^{(\circ)}-\overline{N}}=-\frac{1}{pqN^{(\circ)}}$$

$$f\left(N\right)=f\left(\overline{N}\right)-\frac{1}{2pqN^{(\circ)}}\left(N-\overline{N}\right)^2$$

$$P\left(N,V\right)=e^{f\left(N,V\right)}$$

$$p\left(N,V\right)=\exp\left\{f\left(\overline{N}\right)-\frac{1}{2pqN^{(\circ)}}\left(N-pN^{(\circ)}\right)^2\right\}$$

$$=C\exp\left\{-\frac{1}{2pqN^{(\circ)}}\left(N-pN^{(\circ)}\right)^2\right\}$$

$$\int_{\circ}^{\infty}P\left(N,V\right)dN=1 \quad , \quad C=\frac{1}{\sqrt{2\pi pqN^{(\circ)}}}$$

$$p\left(N,V\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi pqN^{(\circ)}}}\exp\left\{-\frac{1}{2pqN^{(\circ)}}\left(N-pN^{(\circ)}\right)^2\right\}$$

فرمول ۳۴ پیوست (ب)

$$n!\cong\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\ln n! = \frac{1}{2}\ln 2\pi n + n\ln n - n\ln ne$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 2\pi + \ln n\right) + n\ln n - n \cong n\ln n - n$$

$$p\left(N,V\right) = \frac{N^{(\circ)}!}{N!\left(N^{(\circ)} - N\right)!}p^{N}\left(1-p\right)^{N^{(\circ)}-N}$$

$$if \quad p \to \circ \;\Rightarrow\; N \to \infty \;,\; N = \frac{\overline{N}}{p} \;,\; pN^{(\circ)} = \overline{N} << N^{(\circ)}$$

$$\frac{N^{(\circ)}!}{\left(N^{(\circ)} - N\right)!} = \frac{\left(2\pi N^{(\circ)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{N^{(\circ)}}{e}\right)^{N^{(\circ)}}}{\left(2\pi\left(N^{(\circ)} - N\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{N^{(\circ)} - N}{e}\right)^{N^{(\circ)}-N}} \cong \left(N^{(\circ)}\right)^{N}$$

$$\left(1-p\right)^{N^{(\circ)}-N} \cong \left(1-p\right)^{N^{(\circ)}} = \left(1-p\right)^{\frac{\overline{N}}{p}} = e^{-\overline{N}}$$

$$p \to \circ \qquad P\left(N,V\right) = \frac{p^{N}N^{(\circ)N}e^{-\overline{N}}}{N!} \;\to\; p\left(N,V\right) = \frac{\left(\overline{N}\right)^{N}e^{-\overline{N}}}{N!}$$

۴-۴

حل:

$P_{r,s}$ احتمال اینکه در هر زمان t سیستم در حالت $\left(N_r, E_s\right)$ یافت شود برابر است با:

$$P_{r,s}=\frac{e^{\alpha N_r-\beta E_s}}{\sum_{r,s} e^{-\alpha N_r-\beta E_s}}=\frac{z^{N_r}e^{-\beta E_s}}{D}$$

$$D=\sum_{r,s} e^{-\alpha N_r-\beta E_s}$$

اگر بخواهیم دقیقاً N ذره داشته باشیم باید $N=N_r$ باشد و روي تمام مقادير انرژي جمع بسته شود.

$$P(N)=\frac{z^N\sum_s e^{-\beta E_s}}{D}=\frac{z^N Q_N(V,T)}{D}$$

براي گاز كامل كلاسيكي:

$$Q_N(V,T)=\frac{[Q_1]^N}{N!}=\frac{[Vf(T)]^N}{N!}$$

$$D=\exp(zVf(T))$$

$$P(N)=\frac{z^N[Vf(T)]^N}{N!\exp(zVf(T))} \quad , \quad \overline{N}=zVf(T)$$

$$P(N)=e^{-zVf(T)}\frac{[zVf(T)]^N}{N!}=e^{-\overline{N}}\frac{\overline{N}^N}{N!}$$

و اين يك توزيع پواسن است. بنابراين:

$$\langle N\rangle=\overline{N}$$

$$\overline{N^2}=\langle N^2\rangle=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{N^2\left(\overline{N}\right)^N e^{-\overline{N}}}{N!}=e^{-\overline{N}}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{N^2\left(\overline{N}\right)^N}{N!}$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{N}}\left(\overline{N}\right)^N=N\left(\overline{N}\right)^{N-1}\Rightarrow\frac{\partial^2}{\partial\overline{N}^2}=N(N-1)\left(\overline{N}\right)^{N-2}$$

$$\overline{N}^2 \frac{\partial^2}{\partial \overline{N}^2} = N^2 \left(\overline{N}\right)^N - N\left(\overline{N}\right)^N$$

$$N^2 \left(\overline{N}\right)^N = \overline{N}^2 \frac{\partial^2}{\partial \overline{N}^2} + N\left(\overline{N}\right)^N$$

$$\langle N^2 \rangle = e^{-\overline{N}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\left\{ \overline{N}^2 \frac{\partial^2 \overline{N}^N}{\partial \overline{N}^2} + N\left(\overline{N}\right)^N \right\}}{N!}$$

$$= e^{-\overline{N}} \overline{N}^2 \frac{\partial^2}{\partial \overline{N}^2} \left\{ \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\left(\overline{N}\right)^N}{N!} \right\} + e^{-\overline{N}} \overline{N} \frac{\partial}{\partial \overline{N}} \left\{ \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\left(\overline{N}\right)^N}{N!} \right\}$$

$$= e^{-\overline{N}} \overline{N}^2 \frac{\partial^2}{\partial \overline{N}^2} e^{\overline{N}} + e^{-\overline{N}} \overline{N} \frac{\partial}{\partial \overline{N}} e^{-\overline{N}} = \overline{N}^2 + \overline{N}$$

و

$$\langle \overline{N} \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} N \frac{e^{-\overline{N}} \left(\overline{N}\right)^N}{N!} = e^{-\overline{N}}\, \overline{N} \frac{\partial}{\partial \overline{N}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\left(\overline{N}\right)^N}{N!}$$

$$= e^{-\overline{N}}\, \overline{N} \frac{\partial}{\partial \overline{N}} e^{\overline{N}} = \overline{N}$$

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \overline{N}$$

مي دانيم که:

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = kT \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{V,T} \;,\; d\mu = \frac{V}{N} dp - \frac{S}{N} dT$$

$$d(pV) = pdV + Vdp = pdV + Nd\mu + SdT \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_T = \frac{V}{N}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_T = \upsilon\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

υ چگالي حجمي گاز مي باشد.

$$N^2\left(\frac{\partial \mu}{\partial N}\right)_{V,T} = V^2\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{N,T} \quad \Rightarrow \quad \frac{N^2}{V}\left(\frac{\partial \mu}{\partial N}\right)_{V,T} = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{N,T}$$

براي گاز كامل داريم:

$$PV = NkT \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{N,T} = -\frac{NkT}{V^2}$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial N}\right)_{V,T} = -\frac{V^2}{N^2}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{N,T} = -\frac{V^2}{N^2}\left(-\frac{NkT}{V^2}\right) = +\frac{kT}{N}$$

$$\langle(\Delta N)^2\rangle = kT\left(\frac{kT}{N}\right)^{-1} = \overline{N} \quad \Rightarrow \quad \langle(\Delta N)\rangle = \sqrt{\overline{N}}$$

بنابراين همانطوري كه ديده شد از هر دو روش به يك جواب يكسان مي رسيم.

۷-۴

حل:

$$H(r_1, r_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}k\left|r_1 - r_2\right|^2$$

$$Q_1(V,T) = \frac{1}{h^3}\int \exp(-\beta H)\, d^3p\, d^3q$$

$$Q_1(V,T)=\frac{1}{h^3}\int e^{-\frac{\beta p_1^2}{2m}-\frac{\beta p_2^2}{2m}}d^3p_1\,d^3p_2\int e^{-\frac{k\beta}{2}|r_1-r_2|^2}d^3r_1\,d^3r_2$$

$$Q_1(V,T)=\frac{1}{h^3}\left[\int e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}d^3p\right]^2\int e^{-\frac{k\beta}{2}|r_1-r_2|^2}d^3r_1\,d^3r_2$$

$$r_1-r_2=r \quad , \quad r_1=\frac{r+R}{2}$$

$$r_1+r_2=R \quad , \quad r_2=\frac{R-r}{2}$$

$$d^3r_1\,d^3r_2=|J|^3 d^3R\,d^3r$$

$$J\left(\frac{r_1,r_2}{r,R}\right)=\det\begin{vmatrix}\frac{\partial r_1}{\partial r} & \frac{\partial r_2}{\partial r}\\ \frac{\partial r_1}{\partial R} & \frac{\partial r_2}{\partial R}\end{vmatrix}=\det\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

$$Q_1(V,T)=\frac{1}{h^3}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\beta p_x^2}{2m}}d^3p_x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\beta p_y^2}{2m}}d^3p_y\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\beta p_z^2}{2m}}d^3p_z\right]^2$$

$$\times\int e^{-\frac{\beta k}{2}r^2}\frac{V}{8}d^3r$$

$$Q_1(V,T)=\frac{V}{8h^3}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\beta p_x^2}{2m}}d^3p_x\right]^6\int_{\circ}^{\infty}e^{-\frac{\beta k}{2}r^2}4\pi r^2 dr$$

$$=\frac{V\pi^3}{8h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^3\frac{\pi\sqrt{\pi}}{\left(\frac{\beta k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{V\pi^4\sqrt{\pi}}{h^3}\left(\frac{m}{\beta}\right)^3\left(\frac{2}{\beta k}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$Q_N(V,T)=\frac{\left(Q_1(V,T)\right)^N}{N!}=\frac{\left[\frac{V\pi^4\sqrt{\pi}}{h^3}\left(\frac{m}{\beta}\right)^3\left(\frac{2}{\beta k}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^N}{N!}$$

$$D=\sum_{N=\circ}^{\infty}z^N Q_N=\sum_{N=\circ}^{\infty}\frac{\left[\frac{VZ\pi^4\sqrt{\pi}}{h^3}\left(\frac{m}{\beta}\right)^3\left(\frac{2}{\beta k}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^N}{N!}$$

$$=\exp\left[\frac{VZ\pi^4\sqrt{\pi}}{h^3}\left(\frac{m}{\beta}\right)^3\left(\frac{2}{\beta k}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$q=\ln D=\frac{ZV\pi^4\sqrt{\pi}}{h^3}\left(\frac{m}{\beta}\right)^3\left(\frac{2}{\beta k}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$p=\frac{kT}{V}\ln D=\frac{ZkT}{V}\frac{V\pi^4\sqrt{\pi}}{h^3}\left(\frac{m}{\beta}\right)^3\left(\frac{2}{\beta k}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$N = z\frac{\partial}{\partial z}q = z\frac{\partial}{\partial z}\ln D = \frac{V\pi^4\sqrt{\pi}}{h^3}\left(\frac{m}{\beta}\right)^3\left(\frac{2}{\beta k}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$A = -kT\ln\frac{D}{z^N} = -kT\ln\left(\frac{\exp\left(\frac{VZ\pi^4\sqrt{\pi}}{h^3}\left(\frac{m}{\beta}\right)^3\left(\frac{2}{\beta k}\right)^{\frac{3}{2}}\right)}{z^N}\right)$$

$$= NkT\ln z - kT\frac{zV\pi^4\sqrt{\pi}}{h^3}\left(\frac{m}{\beta}\right)^3\left(\frac{2}{\beta k}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}q(V,T,z) = \frac{3zV\pi^4\sqrt{\pi}}{h^3}\left(\frac{m}{\beta}\right)^3\left(\frac{2}{\beta k}\right)^{\frac{3}{2}}$$

۸-۴

حل:

براي گاز ايده آل:

$$Q_1 = \frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}$$

براي سيستم مغناطيسي (با $j = \frac{1}{2}$):

$$Q_1=\sum_{m=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\exp\left(\beta\mu_B gmH\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\beta\mu_B gH\right)+\exp\left(\frac{1}{2}\beta\mu_B gH\right)$$

$$=2cosh\left(\frac{1}{2}\beta\mu_B gH\right)=cosh\left(\beta\mu_B H\right) \qquad , \qquad g=2$$

بنابراین در این مسئله:

$$Q_1=\frac{V}{h^3}\left(2\pi mkT\right)^{\frac{3}{2}}2cosh\left(\beta\mu_B H\right)$$

$$Q_N\left(V,T,N\right)=\frac{1}{N!}\left[\frac{2V}{h^3}\left(2\pi mkT\right)^{\frac{3}{2}}cosh\left(\beta\mu_B H\right)\right]^N$$

$$D=\sum_{N=\circ}^{\infty}z^N Q_N=\sum_{N=\circ}^{\infty}\frac{z^N}{N!}\left[\frac{2V}{h}\left(2\pi mkT\right)^{\frac{3}{2}}cosh\left(\beta\mu_B H\right)\right]^N$$

$$\sum_{N=\circ}^{\infty}\frac{x^N}{N!}=e^x \;\Rightarrow\; D=\exp\left[\frac{2zV}{h^3}\left(\pi mkT\right)^{\frac{3}{2}}Cosh\left(\beta\mu_B H\right)\right]$$

$$A=-kT\ln\frac{D}{z^N}$$

$$=-kT\left[\frac{2zV}{h^3}\left(2\pi mkT\right)^{\frac{3}{2}}cosh\left(\beta\mu_B H\right)-N\ln z\right]$$

از فرمول (۳-۹-۴) داریم:

$$M=-\left(\frac{\partial A}{\partial H}\right)_{T,N}=kT\left(\beta\mu_B\right)\frac{2zV}{h^3}\left(2\pi mkT\right)sinh\left(\beta\mu_B H\right)$$

مغناطش:

$$M=\frac{2\mu_B zV}{h^3}\left(2\pi mkT\right)^{\frac{3}{2}}sinh\left(\beta\mu_B H\right)$$

گرمايي كه به وسيله سيستم داده خواهد شد:

$$Q=-\int_i^f HdM$$

T و V ثابت هستند.

$$dM=\frac{2\mu_B zV}{h^3}\left(2\pi mkT\right)^{\frac{3}{2}}\left(\beta\mu_B\right)cosh\left(\beta\mu_B H\right)dH$$

$$Q=-\int_H^{\circ}\frac{2\mu_B zV}{h^3}\left(2\pi mkT\right)^{\frac{3}{2}}\left(\beta\mu_B\right)cosh\left(\beta\mu_B H\right)H\,dH$$

$$=\frac{1}{h^3}2\mu_B^2\beta zV\,\left(2\pi mkT\right)^{\frac{3}{2}}\int_{\circ}^{H}cosh\left(\beta\mu_B H\right)H\,dH$$

$$\int_{\circ}^{H}cosh\left(\beta\mu_B H\right)H\,dH=\frac{1}{\beta\mu_B}H\,sinh\left(\beta\mu_B H\right)\Big|_{\circ}^{H}$$

$$-\int_{\circ}^{H}\frac{1}{\beta\mu_B}sinh\left(\beta\mu_B H\right)dH$$

$$=\frac{H}{\beta\mu_B}sinh\left(\beta\mu_B H\right)-\left(\frac{1}{\beta\mu_B}\right)^2\left[cosh\left(\beta\mu_B H\right)-1\right]$$

۱۰-۴

✎ حل:

تمام حالتهاي كه N ذره تميز ناپذير مي توانند در $N_\circ$ محل بنشيند عبارتند از:

$$\frac{N_\circ!}{N!(N_\circ - N)!} \Rightarrow Q_N = \frac{N_\circ!}{N!(N_\circ - N)!}\left[a(T)\right]^N$$

كه در اين رابطه $a(T)$ تابع پارش براي يك ذره مي باشد.

$$A = -kT \ln Q_N$$

$$= -kT[N_\circ \ln N_\circ - N_\circ + N - N \ln N$$

$$-(N_\circ - N)\ln(N_\circ - N) + (N_\circ - N) + N \ln a(T)\Big]$$

$$\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T} = -kT\,[\ln N + \ln(N_\circ - N) + \ln a(T)]$$

$$\mu = kT\,\big(\ln N - \ln(N_\circ - N) - a(T)\big) = kT \ln\left[\frac{N}{(N_\circ - N)a(T)}\right]$$

$$D = \sum_{N=\circ}^{\infty} z^N Q_N = \sum_{N=\circ}^{\infty} \frac{N_\circ!\big(za(T)\big)^N}{N!(N_\circ - N)!} = \big(1 + za(T)\big)^{N_\circ}$$

$$q = \ln D = N_\circ \ln\big(1 + za(T)\big) = N_\circ \ln\left[1 + za(T)\right]$$

$$N = z\frac{\partial q}{\partial z} = N_\circ z\,\frac{a(T)}{1 + za(T)}$$

$$\frac{N}{N_\circ} + \frac{N}{N_\circ} za(T) = za(T)\,\frac{N}{N_\circ}\big(1 + za(T)\big) = za(T) \Rightarrow$$

$$\frac{N}{N_\circ}=za(T)\left[1-\frac{N}{N_\circ}\right]$$

$$z=e^{\frac{\mu}{kT}} \Rightarrow \ln z=\frac{\mu}{kT}\quad z=\frac{N}{N_\circ\left(1-\frac{N}{N_\circ}\right)a(T)}\quad ,$$

$$\mu=kT\ln z \Rightarrow \mu=kT\ln\left(\frac{N}{\left(N_\circ-N\right)a(T)}\right)$$

و با نتيجه اي كه از آنسامبل كانوني به دست آورده ايم يكسان است.

۱۱-۴

حل:

هر گاه يك ذره روي يك سطح جذب شود به اندازه ε انرژي از دست مي دهد. بنابراين براي N ذره داريم :

$$Q_1=e^{-\beta(-\varepsilon)}=e^{\beta\varepsilon}$$

$$Q_N=\frac{N_\circ!}{N!\left(N_\circ-N\right)!}Q_1^N=\frac{N_\circ!}{N!\left(N_\circ-N\right)!}e^{N\beta\varepsilon}$$

$$D=\sum_{N=\circ}^{\infty}z^NQ_N=\sum_{N=\circ}^{\infty}\frac{N_\circ!\left(ze^{\beta\varepsilon}\right)^N}{N!\left(N_\circ-N\right)!}=\left(1+ze^{\beta\varepsilon}\right)^{N_\circ}$$

$$q=\ln D=\ln\left(1+ze^{\beta\varepsilon}\right)^{N_\circ}=N_\circ\ln\left(1+ze^{\beta\varepsilon}\right)$$

$$N = z\frac{\partial}{\partial z}q(V,T,z) = zN_{\circ}\frac{e^{\beta\varepsilon}}{1+ze^{\beta\varepsilon}} \Rightarrow \frac{N}{N_{\circ}} = \frac{ze^{\beta\varepsilon}}{1+ze^{\beta\varepsilon}}$$

$$\theta = \frac{N}{N_{\circ}} \Rightarrow \theta\left(1+ze^{\beta\varepsilon}\right) = ze^{\beta\varepsilon} \Rightarrow$$

$$ze^{\beta\varepsilon}(1-\theta) = \theta \Rightarrow z = \frac{ze^{\beta\varepsilon}}{1-\theta}$$

از رابطه (5–4–4) داريم: $P = Zkf\,(T)$ بنابراين:

$$p = \frac{\theta}{1-\theta}e^{-\beta\varepsilon}kTf\,(T) = \frac{\theta}{1-\theta}g\,(T)$$

۱۲-۴

حل:

روش اول: مي دانيم كه براي يك سيستم در آنسامبل گرند كانوني: (*grand canonical ensemble*)

$$P_{r,s} = \frac{e^{-\alpha N_r - \beta E_s}}{\sum_{r,s} e^{-\alpha N_r - \beta E_s}} \quad , \quad D = \sum_{r,s} e^{-\alpha N_r - \beta E_s}$$

$$\overline{NE} = \frac{\sum_{r,s} N_r E_s e^{-\alpha N_r - \beta E_s}}{D} = \frac{1}{D}\left(-z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \beta}D\right)$$

$$= \frac{1}{D}\left[-z\frac{\partial}{\partial z}D\frac{\frac{\partial}{\partial \beta}D}{D}\right] = \frac{1}{D}\left[-z\frac{\partial}{\partial z}D\frac{\partial}{\partial \beta}\ln D\right]$$

$$=\frac{1}{D}\left[z\frac{\partial}{\partial z}D\overline{U}\right]=\frac{\overline{E}}{D}z\frac{\partial}{\partial z}D+\frac{1}{D}zD\frac{\partial}{\partial z}\overline{E}=\overline{E}z\frac{\partial \ln D}{\partial z}+z\frac{\partial\overline{E}}{\partial z}$$

$$\overline{NE}=\overline{N}\,\overline{E}+z\left(\frac{\partial\overline{E}}{\partial z}\right)_{T,V}\Rightarrow\overline{NE}=\overline{N}\,\overline{E}+z\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V}\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)_{T,V}$$

$$z=e^{\frac{\mu}{kT}}\Rightarrow\ln z=\frac{\mu}{kT}\quad,\quad\frac{dz}{z}=\frac{\mu}{kT}\Rightarrow\frac{1}{dz}=\frac{kT}{z\,d\mu}$$

$$\overline{NE}-\overline{N}\,\overline{E}=z\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V}\frac{kT}{z}\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V}$$

$$=kT\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V}\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V}\quad\Rightarrow$$

$$\overline{NE}-\overline{N}\,\overline{E}=kT\frac{\left(\overline{\Delta N}\right)^2}{kT}\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V}=\left(\overline{\Delta N}\right)^2\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V}$$

که در اينجا از رابطه (14–5–4) استفاده کرديم.

روش دوم:

$$\overline{NE}=\sum_{r,s}N_r E_s P_{r,s}=\frac{\sum_{r,s}N_r E_s z^{N_r}e^{-\beta E_s}}{\sum_{r,s}z^{N_r}e^{-\beta E_s}}$$

$$=-\frac{z}{D}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial D}{\partial \beta}\right)_{z,V}\right]_{T,V}$$

$$D=\sum_{r,s} Z^{Nr}e^{-\beta E_s}$$

$$U=-\left(\frac{\partial \ln D}{\partial \beta}\right)_{V,z}=-\frac{1}{D}\left(\frac{\partial D}{\partial \beta}\right)_{V,z}\Rightarrow \overline{NE}=\frac{z}{D}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(DU\right)\right]_{T,V}$$

$$\overline{NE}=\frac{z}{D}\left[\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right)_{T,V}U+D\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{T,V}\right]$$

$$=\frac{z}{D}\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right)_{V,T}U+z\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{T,V}=\overline{N}\,\overline{E}+z\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{T,V}$$

$$\overline{NE}-\overline{N}\,\overline{E}=\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)_{V,T}\left(-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_{V,z}=\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)_{V,T}\left(\frac{\partial \ln D}{\partial z}\right)_{T}\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)$$

$$z=e^{\beta\mu}\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial \beta}=\mu e^{\beta\mu}=\mu z=\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V}z$$

$$\overline{NE}-\overline{N}\,\overline{E}=\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)_{V,T}\left(\frac{\partial \ln D}{\partial z}\right)_{T,V}$$

$$=\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2_{V,T}\ln D\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{V,T}=\left(\Delta N\right)^2\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V}$$

۴-۱۳

حل:

$$J=E-N\mu=TS-pV$$

$$\left\langle (\Delta J)^2 \right\rangle = \left\langle J^2 \right\rangle - \left\langle J \right\rangle^2 = \left\langle (E - N\mu)^2 \right\rangle - \left\langle E - N\mu \right\rangle^2$$

$$= \left\langle \left(E^2 + N^2\mu^2 - 2\mu NE \right) \right\rangle - \left[\left\langle E \right\rangle - \left\langle N\mu \right\rangle \right]^2$$

مي دانيم كه در آنسامبل گرند كانوني μ ثابت مي باشد، بنابراين :

$$\left\langle (\Delta J)^2 \right\rangle = \left\langle E^2 \right\rangle + \mu^2 \left\langle N^2 \right\rangle - 2\mu \left\langle NE \right\rangle - \left\langle E \right\rangle^2$$

$$-\mu^2 \left\langle N^2 \right\rangle + 2\mu \left\langle E \right\rangle \left\langle N \right\rangle$$

$$\left\langle (\Delta J)^2 \right\rangle = \left(\left\langle E^2 \right\rangle - \left\langle E \right\rangle^2 \right) + \mu^2 \left(\left\langle N^2 \right\rangle - \left\langle N \right\rangle^2 \right)$$

$$-2\mu \left(\left\langle NE \right\rangle - \left\langle E \right\rangle \left\langle N \right\rangle \right)$$

$$\left\langle (\Delta J)^2 \right\rangle = \left\langle (\Delta E)^2 \right\rangle + \mu^2 \left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle - 2\mu \left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{V,T}$$

در اينجا از مساله (۴- ۱۱) استفاده كرده ايم و با استفاده از رابطه (۴-۵- ۱۸) داريم :

$$\left\langle\left(\Delta J^2\right)\right\rangle = kT^2 C_V + \left\langle\left(\Delta N\right)^2\right\rangle \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,T}\right\}^2$$

$$. \qquad + \mu^2 \left\langle(\Delta N)^2\right\rangle - 2\mu \left\langle(\Delta N)^2\right\rangle \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V}$$

$$= kT^2 C_V + \left\langle\left(\Delta N\right)^2\right\rangle \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,T} - \mu\right\}^2 \quad \Rightarrow$$

$$\left\langle(\Delta J^2)\right\rangle = kT^2 C_V + \left\langle(\Delta N)^2\right\rangle \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,T} - \mu\right\}^2$$

فصل 5

۵-۱ ماتریس چگالی ρ_{mn} یک اسپین الکترون در نمایشی که ماتریس σ_x قطری است را محاسبه کنید . سپس نشان دهید که مقدار $\langle \sigma_z \rangle$ نتیجه این نمایش، همان اندازه که در بخش (۵-۳) بدست آمده بود با ارزش است .

راهنمايي : آنچه بايد نشان داده شود همان كاري است كه در بخش ۵-۳ با بدست آوردن يك ماتريس تبديل يونيتاري انجام شده است.

حل:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \circ \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \alpha' = -\beta' \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$|\chi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad |\chi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$H=-\mu_B \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{B}=-\mu_B B_z \sigma_z=-B\mu_B u^T \sigma_z u$$

$$(\sigma_z)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\rho=\frac{e^{-\beta H}}{Tr(e^{-\beta H})}=\frac{1}{e^{\beta\mu B}+e^{-\beta\mu B}}\begin{pmatrix} e^{\beta\mu_B} & 0 \\ 0 & e^{-\beta\mu_B} \end{pmatrix} \qquad -۵)$$

(۳-۳

$$[\rho]=\frac{\frac{1}{2}}{e^{\beta\mu_B}+e^{-\beta\mu_B}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\beta\mu_B} & 0 \\ 0 & e^{-\beta\mu_B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2cosh(\beta\mu_B)}\begin{pmatrix} cosh(\beta\mu_B) & sinh(\beta\mu_B) \\ sinh(\beta\mu_B) & cosh(\beta\mu_B) \end{pmatrix}$$

$$\rho=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \tanh\beta\mu_B \\ \tanh\beta\mu_B & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\langle\sigma_z\rangle=Tr(\rho\sigma_z)=\frac{1}{2}Tr\begin{pmatrix} 1 & \tanh\beta\mu_B \\ \tanh\beta\mu_B & 1 \end{pmatrix}=\tanh\beta\mu_B \qquad -۵)$$

(۴-۳

نتیجه: محاسبه میانگین يك کمیت به پایه اي که در آن محاسبه انجام مي شود بستگي ندارد

۲-۵ ثابت کنید که

$$\left\langle q\left|e^{-B\hat{\mathbf{H}}}\right|q'\right\rangle \equiv \exp\left[-\beta\,\hat{\mathbf{H}}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q},q)\right]\delta(q-q')$$

که $\hat{\mathbf{H}}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q},q)$ هامیلتونین سیستم در نمایش q می باشد. که بطور قراردادی روی تابع دلتای دیراک $\delta(q-q')$ اثر می کند. نوشتن تابع دلتا در فرم مناسب برای نتایج زیر بکار برده می شود:

الف) یک ذرهٔ آزاد

ب) یک نوسانگر هماهنگ ساده

حل:

روش اول: در نمایش q برای معادله شرودینگر داریم.

$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q'}+q'\right)\varphi_l(q')=E_l\varphi_l(q')$$

$$\langle q'|e^{-\beta H}|q'\rangle=\langle q'|e^{-\beta H}|l\rangle\langle l|q'\rangle=\sum_l\langle q'|l\rangle\langle l|e^{-\beta H}|l\rangle\langle l|q'\rangle$$

$$=\sum_l e^{-\beta E_l}\varphi_l(q')\varphi_l^*(q')$$

$$e^{-\beta H}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\beta)^n\frac{H^n}{n!}\quad,\quad e^{-\beta H}\varphi_l(q')=e^{-\beta E_l}\varphi_l(q')$$

$$\langle q'|e^{-\beta H}|q''\rangle=e^{-\beta H}\sum_l\varphi_l(q')\varphi_l^*(q')=e^{-\beta H}\delta(q'-q'')$$

$$\delta(q'-q'')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')}d^3k$$

$$\langle x'|e^{-\beta\frac{P^2}{2m}}|x''\rangle=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{\beta\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')}d^3k$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\beta\hbar^2k^2}{2m}+i\mathbf{k}.(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')\right]d^3\mathbf{k}$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)\exp\left[\frac{-m}{2\beta\hbar^2}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')^2\right]$$

روش دوم:

$$e^{-\beta\hat{\mathbf{H}}}=e^{-\beta\hat{\mathbf{H}}}\left(\sum_n|E_n\rangle\langle E_n|\right)$$

$$\left\langle q|e^{-\beta H}|q'\right\rangle=\langle q|e^{-\beta H}\sum_n|E_n\rangle\langle E_n|q'\rangle$$

$$=e^{-\beta H}\sum_n\varphi_n(q)\varphi_n^*(q)=e^{-\beta H}\delta(q-q')$$

در مورد ذرة آزاد داريم:

$$\varphi_n(q)=\frac{1}{L^{\frac{3}{2}}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\quad\rightarrow\quad\varphi_n^*(q)=\frac{1}{L^{\frac{3}{2}}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\begin{cases}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d^3\mathbf{k}\\[2ex] H=\dfrac{P^2}{2m}\end{cases}$$

$$\langle q|e^{-\beta H}|q'\rangle=e^{-\beta H}\delta(q-q')=\frac{e^{-\beta H}}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d^3\mathbf{k}$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[\frac{m}{2\beta\hbar^2}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)^2\right]$$

$$Tr(e^{-\beta H})=\langle q\left|e^{-\beta\hat{\mathbf{H}}}\right|q'\rangle=\langle r\left|e^{-\beta\hat{\mathbf{H}}}\right|r\rangle=\int\langle r\left|e^{-\beta\hat{\mathbf{H}}}\right|r\rangle d^3r=V\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

۳-۵ ماتریس چگالی ρ برای الف) یک ذرهٔ آزاد ب) یک نوسانگر هماهنگ خطی در نمایش تکانه بدست آورید.
مهمترین خصوصیات این سیستم که در بخش (۳-۵) آمده اند را مطالعه کنید .

حل:

هامیلتونی ذرهٔ آزاد بصورت زیر است.

$$\hat{\mathbf{H}}=\frac{p^2}{2m}\ ,\ H\left|E\right\rangle=E\left|E\right\rangle\ ,\ \hat{\mathbf{p}}\left|p\right\rangle=p\left|p\right\rangle\ ,\ \left[\hat{\mathbf{H}},\hat{\mathbf{p}}\right]=0$$

$$\langle p\left|e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right|p'\rangle=e^{-\beta\frac{p'^2}{2m}}\ \delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}'\right)$$

$$Tr\left(e^{-\beta\hat{H}}\right)=Tr\left(e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right)=\frac{1}{h^3}\int e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}d^3p'=\frac{4\pi}{h^3}\int p'^2e^{-\beta\frac{p'^2}{2m}}dp'$$

$$=-\frac{4\pi}{h^3}\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha P'^2}dp'=-\frac{4\pi}{h^3}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)=2\pi\sqrt{\pi}\alpha^{-\frac{3}{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$\alpha=\frac{\beta}{2m}\quad,\quad Tr\left(e^{-\beta H}\right)=\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\langle p\rangle=\frac{Tr(\rho p)}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}\quad\Rightarrow\quad\langle p|\rho|p'\rangle=e^{-\beta\frac{p'^2}{2m}}\,\delta(p-p')\left(\frac{2\pi m}{\hbar^2\beta}\right)^{\frac{-3}{2}}$$

$$\langle H\rangle=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left[Tr\left(e^{-\beta\hat{H}}\right)\right]=-\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)\right]=-\frac{3}{2}\frac{-\frac{2\pi m}{\beta^2}}{\frac{2\pi m}{\beta}}=\frac{3}{2}kT$$

$$\langle p|\rho|p'\rangle=\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{-3}{2}}e^{-\beta\frac{p'^2}{2m}}\,\delta\left(\frac{p}{\hbar}-\frac{p'}{\hbar}\right)$$

ب) براي نوسانگر هارمونيك داريم.

$$\hat{\mathbf{H}}=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

$$\langle p|e^{-\beta\hat{\mathbf{H}}}|p'\rangle=\sum_{n,n'=\circ}^{\infty}\langle p|n\rangle\langle n|e^{-\beta H}|n'\rangle\,\langle n'|p'\rangle=\sum_{n=\circ}^{\infty}e^{-\beta E_n}\,\varphi_n(p)\varphi_n^*(p')$$

$$\varphi_n(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\varphi_n(x)e^{-i\frac{px}{\hbar}}dx$$

$$\varphi_n(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)}{\left(2^n n!\right)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega x^2}{\hbar}}$$

H_n ها توابع هرميت مي‌باشند.

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\left(2^n n!\right)^{\frac{1}{2}}}\int e^{\left(-i\frac{px}{\hbar}-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)dx$$

$$H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)=\frac{e^{\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-2iu)^n e^{-u^2+2i\xi u}du \quad , \quad \xi=\sqrt{\frac{mu}{\hbar}}x$$

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\left(2^n n!\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times\int e^{\left(-i\frac{px}{\hbar}-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)}\frac{e^{\frac{m\omega x^2}{\hbar}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-2iu)^n e^{-u^2+2i\xi u}du\,dx$$

$$\varphi_n^*(p')=\langle n|p'\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{i\frac{p'x'}{\hbar}}\varphi_n(x')dx'$$

$$\varphi_n(x')=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)}{\left(2^n n!\right)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}m-\frac{x'^2}{\hbar}}$$

$$\varphi_n^*(p')=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\left(2^n n!\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times\int dx' e^{i\frac{p'x'}{\hbar}+\frac{m\omega x'}{2\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}(-2iu)^n e^{(-u^2+2i\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x'u)}du$$

معادله φ_n^*,φ_n را در معادله (۱) قرار مي‌دهيم:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{e^{-\beta\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{2\pi^{2}\hbar}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{n!}\int\int dx\, e^{\left(-i\frac{px}{\hbar}-\frac{m\omega x^{2}}{2\hbar}\right)}dx'\, e^{\left(-i\frac{px'}{\hbar}-\frac{m\omega x'^{2}}{2\hbar}\right)}$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}\left(-2uv\right)^{n}e^{\left(-u^{2}+2i\sqrt{\frac{m\omega}{\pi}}xu-v^{2}+2i\sqrt{\frac{m\omega}{\pi}}xv\right)}du\,dv$$

$$=\frac{1}{2\pi^{2}\hbar}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\int dx\, e^{\left(-i\frac{px}{\hbar}-\frac{m\omega x^{2}}{2\hbar}\right)}$$

$$\times\int dx'\, e^{\left(-i\frac{px'}{\hbar}-\frac{m\omega x'^{2}}{2\hbar}\right)}\left[\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{-\beta\hbar\omega^{2}(-2vu)^{n}}{n!}\right]$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}\left(-2uv\right)^{n}e^{\left(-u^{2}+2i\sqrt{\frac{m\omega}{\pi}}xu-v^{2}+2i\sqrt{\frac{m\omega}{\pi}}xv\right)}du\,dv$$

$$\langle p|e^{-\beta\hat{\mathbf{H}}}|p'\rangle=\frac{1}{2\pi\hbar}\int dx\,dx'\,e^{\left(-i\frac{px}{\hbar}-i\frac{px'}{\hbar}\right)}\times\frac{1}{\pi}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^{2}+x'^{2}\right)}e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left(-u^{2}+2i\sqrt{\frac{m\omega}{\pi}}xu-v^{2}+2i\sqrt{\frac{m\omega}{\pi}}x'v-2uve^{-\beta\hbar\omega}\right)}du\,dv$$

$$=\left[\frac{m\omega}{2\pi\hbar\sin\left(\beta\hbar\omega\right)}\right]\exp\left[-\frac{m\omega}{4\pi}\left\{\left(x+x'\right)^{2}\tan\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right.\right.$$

$$+\left(x-x'\right)^2 cot\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\Big\}\Big]$$

$$\langle p\left|e^{-\beta\hat{\mathbf{H}}}\right|p'\rangle=\int\langle p|x\rangle\langle x\left|e^{-\beta H}\right|x'\rangle\,\langle x'|p'\rangle dx'dx$$

$$=\frac{1}{4\pi\hbar}\int\int dx\,dx'e^{-i\frac{px}{\hbar}}e^{-i\frac{p'x'}{\hbar}}\langle x\left|e^{-\beta H}\right|x'\rangle$$

۴-۵ ماتریس چگالی و تابع پارش یک سیستم از ذرات آزاد را بررسی کنید. از تابع موج پادمتقارن (۵-۴-۳) بجای تابع موج متقارن (۵-۵-۷) استفاده کنید. نشان دهید که با این فرایند هم چنین فاکتور گیبس $\frac{1}{N!}$ بدست می آید. ارتباط فضای بین ذرات وجود ندارد.

حل:

$$\hat{\mathbf{e}}=\frac{e^{-\beta H}}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}$$

$$\langle r_1,r_2,\ldots,r_N\left|e^{-\beta H}\right|r'_1,r'_2,\ldots,r'_N\rangle=$$

$$=\sum_E\langle r_1,r_2,\ldots,r_N\left|E\right\rangle e^{-\beta E}\langle E\left|r'_1,r'_2,\ldots,r'_N\right\rangle$$

$$=\sum_E\psi_E\left(r_1,r_2,\ldots,r_N\right)e^{-\beta E}\psi^*_E\left(r'_1,r'_2,\ldots,r'_N\right)$$

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\mathbf{k}_1^2+\mathbf{k}_2^2+\ldots+\mathbf{k}_N^2\right)\quad,\quad\mathbf{k}=\frac{2\pi}{V^{\frac{1}{3}}}\hat{\mathbf{n}}$$

$$\det\psi_E\left(r_1,r_2,\ldots,r_N\right)=u_{E_1}(1)u_{E_2}(2)\ldots u_{E_N}(N)$$

$$\left\langle r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N \left| e^{-\beta H} \right| r_1', r_2', r_3', \ldots, r_N' \right\rangle$$

$$= \sum_k u_{E_1}(1) u_{E_2}(2) \ldots u_{E_N}(N) e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2m}(k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_N^2)}$$

$$\times u^*_{E_1}(1) u^*_{E_2}(2) \ldots u^*_{E_N}(N)$$

$$\sum_k \Rightarrow \int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k$$

$$\langle r_1, r_2, \ldots, r_N \left| e^{-\beta H} \right| r'_1, r'_2, \ldots, r'_N \rangle = \frac{V^N}{(2\pi)^{3N}} \int u_{E_1}(1) u^*_{E_1}(1) e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2m} k_1^2} d^3k_1$$

$$\times \int u_{E_2}(2) u^*_{E_2}(2) e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2m} k_2^2} d^3k_2 000$$

$$u_{E_1} = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \exp(ik.1)$$

$$\int u_{E_1}(1) u^*_{E_1}(1) e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2m} k_1^2} d^3k_1 = \frac{1}{V} \int \exp\left(ik_1(1\text{-}1') - \frac{\beta\hbar^2}{2m} k_1^2 \right) d^3k_1$$

$$= \frac{1}{V}\left(2\pi^3\right)\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right) \exp\left(\frac{m}{2\beta\hbar^2}(1\text{-}1')^2\right) \Rightarrow$$

$$\langle r_1, r_2, \ldots, r_N \left| e^{-\beta H} \right| r'_1, r'_2, \ldots, r'_N \rangle = \frac{V^N}{(2\pi)^{3N}} \left[\frac{1}{V^N} (2\pi)^{3N} \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{\frac{3N}{2}} \right]$$

$$Q_N(\beta)=Tr\left(e^{-\beta H}\right)=\langle r_1,r_2,\ldots,r_N\left|e^{-\beta H}\right|r'_1,r'_2,\ldots,r'_N\rangle=\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{\frac{3N}{2}}$$

$$Tr\left(e^{-\beta H}\right)=\int d^3r_1\int d^3r_2\ldots\langle r_1,r_2,\ldots,r_N\left|e^{-\beta H}\right|r_1,r_2,\ldots,r_N\rangle=\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{\frac{3N}{2}}$$

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}\quad\Rightarrow\quad Tr\left(e^{-\beta H}\right)=\frac{V^N}{\lambda^{3N}}$$

بنابراین میبینیم که نه جمله تصحیحی گیبس وارد شده و نه همبستگی فضایی.

۵-۵ نشان دهید که تابع پارش یک سیستم N ذره ای غیر برهمکنشی تمیز ناپذیر در تقریب اول با رابطه زیر داده می شود:

$$Q_N(V,T)=\frac{1}{N!\lambda^{3N}}Z_N(V,T)$$

که

$$Z_N(V,T)=\int\exp(-\beta\sum_{i<j}V_s(r_{ij})\,dr^{3N}$$

$V_s(r)$ پتانسیل آماری (۵-۵-۲۸) می باشد سپس تصحیح مرتبه اول معادله حالت این سیستم را بدست آورید.

حل:

از معادله (۵-۵-۲۸) داریم:

$$V_s(r)=-kT\ln\left[1\pm\exp(-\frac{2\pi r^2}{\lambda^2})\right]$$

می دانیم که تابع پارش یک سیستم N ذره ای تمیز ناپذیر بدون برهمکنش داخلی به صورت زیر است.

$$Q_N(V,T)=\frac{1}{N!\lambda^{3N}}\int\left[1\pm\sum_{i<j}f_{ij}f_{ji}+\sum_{i<j<k}f_{ij}f_{jk}f_{ki}\pm 000\right]d^{3N}r$$

در تقریب اول داریم:

$$Q_N(V,T)=\frac{1}{N!\lambda^{3N}}\int\left[1\pm\sum_{i<j}f_{ij}f_{ji}\right]d^{3N}r$$

$$f_{ij}=f(r_i-r_j)\quad,\quad f(r)=\exp(-\frac{\pi r^2}{\lambda^2})\;\Rightarrow\; f_{ij}f_{ji}=\exp(-\frac{2\pi r_{ij}^2}{\lambda^2})$$

باید نشان دهیم که این رابطه با رابطه زیر معادل است.

$$Q_N(V,T)=\frac{1}{N!\lambda^{3N}}\int\left[1\pm\sum_{i<j}\exp(\frac{-2\pi r_{ij}{}^2}{\lambda^2})\right]d^{3N}r$$

$$Q_N(V,T)=\frac{1}{N!\lambda^{3N}}\int\exp\left\{-\beta\sum_{i<j}V_s(r_{ij})\right\}d^{3N}r$$

$$=\frac{1}{N!\lambda^{3N}}\int\exp\left\{-\beta\sum_{i<j}-kT\,\ln\left[1\pm\exp(-\frac{2\pi r_{ij}^2}{\lambda^2})\right]\right\}d^{3N}r$$

$$=\frac{1}{N!\lambda^{3N}}\int\exp(\sum_{i<j}\ln[1\pm e^{-\frac{2\pi r_{ij}^2}{\lambda^2})}])d^{3N}r$$

$$=\frac{1}{N!\lambda^{3N}}\int\prod_{i<j}(1\pm e^{-\frac{2\pi r_{ij}^2}{\lambda^2}})d^{3N}r$$

$$\prod_{i<j}\left(1\pm e^{-\frac{2\pi r_{ij}^2}{\lambda^2}}\right)=\left(1\pm e^{-\frac{2\pi r_{ij}^2}{\lambda^2}}\right)\left(1\pm e^{-\frac{2\pi r_{ij}^2}{\lambda^2}}\right)=1\pm\sum_{i<j}e^{-\frac{2\pi r_{ij}^2}{\lambda^2}}\pm 000$$

حالت تصحیح اول کوانتومی را اعمال می‌کنیم.

$$\prod_{i<j}\left(1\pm e^{-\frac{2\pi r_{ij}^2}{\lambda^2}}\right)\simeq 1\pm\sum_{i<j}e^{-\frac{2\pi r_{ij}^2}{\lambda^2}}$$

$$Q_N(V,T)=\frac{1}{N!\lambda^{3N}}\int\prod_{i<j}\left(1\pm e^{-\frac{2\pi r_{ij}^2}{\lambda^2}}\right)d^{3N}r \quad\Rightarrow$$

$$Q_N(V,T)=\frac{1}{N!\lambda^{3N}}\int\left(1\pm\sum_{i<j}e^{-\frac{2\pi r_{ij}^2}{\lambda^2}}\right)d^{3N}r$$

۵-۶ مقدار تبهگنی قابل تشخیص (degeracy discriminant) $n\lambda^3$ را برای هیدروژن، هلیوم و اکسژن در شرایط N.T.P محاسبه کنید - یک تقریب از محدوده دما بدست آورید که برای آن محدوده این مقادیر از مرتبه واحد باشند بنابر این در این شرایط اثرات کوانتم مکانیکی مهم محسوب می شوند.

حل:

براي تقريب كلاسيك داريم:

$$n\lambda^3=\frac{n}{n_a}=\frac{n}{\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}}<<1$$

$$pV=NkT \quad\Rightarrow\quad n=\frac{p}{kT} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{p}{(kT)^{\frac{5}{2}}}<<1$$

براي هليم داريم:

$$\frac{n}{n_a}=\frac{\dfrac{1/\circ13\times1\circ^{5}}{1/38\circ\times1\circ^{-23}\times273/15}}{\left(\dfrac{2\pi\times4/\circ\circ3\times1/66\times1\circ^{27}\times1/33\times1\circ^{-23}\times273/15}{\left(6/625\times1\circ^{-39}\right)^{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2/687\times1\circ^{25}}{6/787\times1\circ^{32}}$$

براي اکسيژن داريم:

$$\frac{n}{n_a}=\frac{2/687\times1\circ^{25}}{6/787\times1\circ^{3\circ}\left(\dfrac{31/998}{4/\circ\circ3}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2/687\times1\circ^{25}}{1/534\times1\circ^{32}}$$

دماي نهايي هليم:

$$6/787\times1\circ^{3\circ}\left(\frac{T_f}{273/15}\right)^{\frac{3}{2}}=2/687\times1\circ^{25}\ \Rightarrow\ T_f=6/84\times1\circ^{-2}\ {}^\circ k$$

دماي نهايي اکسيژن:

$$1/534\times1\circ^{32}\left(\frac{T_f}{273/15}\right)^{\frac{3}{2}}=2/687\times1\circ^{25}\ \Rightarrow\ T_f=8/55\times1\circ^{-3}\ {}^\circ k$$

۵-۷ ثابت کنيد که تابع پارش کوانتم مکانيکی برای يک سيستم N ذره ای بر هم کنشی در فرم کلاسيک به شکل زير است.

$$Q_N(V,T)=\frac{1}{N!h^{3N}}\int e^{-\beta E(p,q)}(d^{3N}q\ d^{3N}p)$$

همچنين طول موج گرمايی ميانگين خيلی کوچکتر می شود از ۱- فاصله ميانگين ذرات $\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$ و ۲ - طول مشخص $r_\circ$ از پتانسيل بر هم کنشی.

حل:

$$Q_N(V,T)=Tr\left(e^{-\beta H}\right)=Tr\left[e^{-\beta(K+U)}\right]=Tr\left[e^{-\beta K}e^{-\beta U}e^{-\frac{1}{2}\beta^2[K,U]+O(\beta)}\right]$$

$$[K,U]=\left[\sum_{i=1}^{N}-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2,U\left[\left(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N\right)\right]\right]=\sum_{i=1}^{N}-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla_i^2U+2\boldsymbol{\nabla}_iU.\boldsymbol{\nabla}_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2U+\frac{i\hbar}{m}\mathbf{F}_i.\mathbf{P}_i\right)$$

$$\mathbf{F}_i\equiv-\boldsymbol{\nabla}_iU \quad , \qquad \mathbf{P}_i=i\hbar\boldsymbol{\nabla}_i$$

که در P_i و F_i در این رابطه بصورت زیر تعریف شده اند.

$$[K,U]=2\frac{U'}{\beta}+\frac{i\hbar}{m}\mathbf{F}_i.\mathbf{P}_i$$

U' به صورت زیر تعریف مي شود.

$$U'\equiv-\frac{\beta}{2}\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{N}\nabla_i^2U$$

ماتریس مستقل از نمایش است. بنابراین مي‌توانیم از هر مجموعه کاملي از حالتها براي محاسبه آن استفاده کنیم. بویژه مي‌توان از پایه هاي ذره آزاد استفاده کرد.

$$Q_N(V,T)=\int d^{3N}r\,\langle 1,\ldots,N\left|e^{-\beta H}\right|\ldots,N\rangle$$

$$\sum_k\int d^{3N}r\,e^{-\beta\left(\frac{-\hbar^2k^2}{2m}+U+U'+i\frac{\beta\hbar}{2m}\mathbf{F}.\hbar\mathbf{k}\right)}\psi_k^*(1,\ldots N)\psi_k(1,\ldots N)$$

با استفاده از روابط زیر

$$\sum_k = \frac{1}{N!}\sum_{\mathbf{k}_1}\sum_{\mathbf{k}_2}\cdots\sum_{\mathbf{k}_N} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N!}\int \frac{V^N d^3k}{(2\pi)^{3N}}$$

$$\mathbf{R} = \frac{\beta^2\hbar^2}{2m}\mathbf{F}$$

داريم

$$Q_N(V,T) = \frac{1}{N!}\int d^{3N}r\, e^{-\beta(U+U')}\frac{1}{h^{3N}}\left[\int d^3P\, e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}\right]^N$$

$$\sum_p \delta_p\left[f\left(\mathbf{r}_1 - p\,\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}\right)\dots f\left(\mathbf{r}_N - p\,\mathbf{r}_N - \mathbf{R}\right)\right]$$

با استفاده از تقريب (۵-۵-۱۹) داريم.

$$\sum_p \approx 1 + \sum_{i<j} f_{ij} f_{ji} \approx \prod_{i<j}\left(1 \pm f_{i,j}^2\right) = e^{\beta\sum_{i,j} U_{i,j}^2} \equiv e^{-\beta U}$$

$$Q_N(V,T) \approx \frac{1}{N!\,h^{3N}}\int d^{3N}p\, d^{3N}r\, e^{-\beta\left(\sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U\right)} e^{-\beta(U'+U'')}$$

$$e^{-\beta(U'+U'')} \approx 1$$

در شرايط كنوني $e^{-\beta(U'+U'')} \approx 1$ است لذا:

$$Q_N(V,T) \approx \frac{1}{N!\,h^{3N}}\int d^{3N}p\, d^{3N}r\, e^{-\beta H(p,r)}$$

۵-۱ معادله (۵-۳-۲۳) را با استفاده از یک ارزیابی واضح از المانهای عملکرد ماتریس در طرف چپ آن بررسی کنید.

حل:

از روابط (۵-۳-۳۳) کتاب داریم:

$$\langle -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\rangle = \frac{1}{2}\langle H\rangle$$

$$\langle -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\rangle = \langle \frac{P^2}{2m}\rangle = \frac{1}{2m}\langle P^2\rangle = \frac{1}{2m}Tr(\hat{\mathbf{p}}\ \hat{\mathbf{p}}^2)$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_n \langle n|\rho P^2|n\rangle = \frac{1}{2m}\sum_{n,m}\langle n|P^2|m\rangle\langle m|P^2|n\rangle$$

از طرفي مي دانيم که:

$$P = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right) \quad \Rightarrow$$

$$P^2 = \frac{-m\hbar\omega}{2}\left(a^{\dagger 2} - a^\dagger a - aa^\dagger + a^2\right)$$

$$\langle m|a|n\rangle = \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1} \Rightarrow \langle m|a^2|n\rangle = \langle m|aa|n\rangle = \sqrt{n}\langle m|a|n-1\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\langle m|a^2|n\rangle = \sqrt{n(n-1)}\,\delta_{m,n-2}$$

$$\langle m|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1} \Rightarrow \langle m|a^{\dagger 2}|n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2)}\,\delta_{m,n+2}$$

$$\langle m|aa^\dagger|n\rangle = (n+1)\,\delta_{m,n} \quad \Rightarrow \quad \langle m|aa^\dagger|n\rangle = n\,\delta_{m,n}$$

$$\langle m|P^2|n\rangle = \frac{-m\hbar\omega}{2}\Big[\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} - n\,\delta_{m,n}$$

$$-(n+1)\delta_{m,n} - n\,\delta_{m,n} + \sqrt{n(n-1)}\,\delta_{m,n-2}\Big] \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2m}\langle P^2\rangle = \frac{1}{2m}\sum_{n,m}\rho_{n,m}\left(\frac{-m\hbar\omega}{2}\right)\Big[\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2} - n\,\delta_{m,n}$$

$$-(n+1)\delta_{m,n} - n\,\delta_{m,n} + \sqrt{n(n-1)}\,\delta_{m,n-2}\Big]$$

$$= \frac{-\hbar\omega}{4}\Bigg[\sum_{n,m}\sqrt{(n+1)(n+2)}\,\rho_{n,m}\delta_{m,n+2} - \sum_{n,m}(n+1)\rho_{n,m}\delta_{m,n}$$

$$-\sum_{n,m} n\,\rho_{n,m}\delta_{m,n} - \sum_{n,m}\sqrt{n(n-1)}\rho_{n,m}\delta_{m,n-2}\Bigg] \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2m}\langle P^2\rangle = -\frac{\hbar\omega}{4}\Bigg[\sum_{n}\sqrt{(n+1)(n+2)}\rho_{n,n+2} - \sum_{n}(n+1)\rho_{n,n}$$

$$-\sum_{n} n\,\rho_{n,n} + \sum_{n}\sqrt{n(n-1)}\rho_{n,n-2}\Bigg]$$

از طرفي مي دانيم که:

$$\rho_{n,m} = \langle n|\frac{e^{-\beta H}}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}|m\rangle$$

$$= \frac{1}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}\langle n|e^{-\beta H}|m\rangle = \frac{e^{-\beta E_m}}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}\langle n|m\rangle$$

$$\rho_{n,m}=\frac{e^{-\beta\left(m+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}\delta_{n,m} \quad\Rightarrow\quad \rho_{n,n+2}=\rho_{n,n-2}=\circ$$

$$\frac{1}{2m}\langle P^2\rangle=\frac{\hbar\omega}{4}\left[\sum_n(n+1)\rho_{n,n}-\sum_n n\rho_{n,n}\right]=\frac{\hbar\omega}{4}\sum_n\left[(n+1)+n\right]\rho_{n,n}$$

$$\frac{1}{2m}\langle P^2\rangle=\frac{\hbar\omega}{4}\sum_n(2n+1)\rho_{n,n}=\frac{\hbar\omega}{4}\sum_n(2n+1)\frac{e^{\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\times\frac{e^{\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}=\frac{1}{2}\sum_n\frac{e^{\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$=\frac{1}{2}\sum_n\langle n|\rho H|n\rangle=\frac{1}{2}Tr\left(\rho H\right)=\frac{1}{2}\langle H\rangle \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2m}\langle P^2\rangle=\frac{1}{2}\langle H\rangle$$

فصل 6

۶-۱ - نشان دهید که آنتروپی یک گاز ایده آل در تعادل گرمایی در مورد بوزون ها با فرمول

$$S = k\sum_{\varepsilon}\left[\langle n_{\varepsilon}+1\rangle \ln\langle n_{\varepsilon}+1\rangle - \langle n_{\varepsilon}\rangle \ln\langle n_{\varepsilon}\rangle\right]$$

در مورد فرمیونها با فرمول

$$S = k\sum_{\varepsilon}\left[-\langle 1-n_{\varepsilon}\rangle \ln\langle 1-n_{\varepsilon}\rangle - \langle n_{\varepsilon}\rangle \ln\langle n_{\varepsilon}\rangle\right]$$

داده می شود.

نشان دهید این نتایج با فرمول عمومی

$$S = -k\sum_{\varepsilon}\left\{\sum_{\varepsilon} p_{\varepsilon}(n) \ln p_{\varepsilon}(n)\right\}$$

سازگارند. که در آن $p_{\varepsilon}(n)$ احتمال وجود دقیقاً n ذره د ر حالت انرژی است .

<u>حل:</u>

$$q(z,V,T)=1/a\sum_{\varepsilon}\ln(1+aze^{-\beta\varepsilon})$$

$$\langle n_\varepsilon\rangle=\frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon}+a} \quad ,z=e^{\mu\beta}$$

$$s=k\left[\frac{\partial}{\partial T}(Tq)\right]_{\mu,V}=-k\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^{-1}q\right)_{\mu,V}$$

$$=-k\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\beta^{-1}1/a\sum_{\varepsilon}\ln(1+ae^{-\beta\varepsilon})\right]$$

$$S=-k\frac{\beta^2}{a}\left\{-\beta^{-2}\sum_{\varepsilon}\ln\left[e^{(\mu-\varepsilon)\beta}(e^{-(\mu-\varepsilon)\beta}+a)\right]+\beta^{-1}\sum_{\varepsilon}\frac{a(\mu-\varepsilon)e^{-(\mu-\varepsilon)\beta}}{1+ae^{-(\mu-\varepsilon)\beta}}\right\}$$

$$e^{(\varepsilon-\mu)\beta}=\frac{1}{\langle n_\varepsilon\rangle}-a \qquad \Rightarrow(\varepsilon-\mu)\mu=\ln\left(\frac{1}{\langle n_\varepsilon\rangle}-a\right)$$

$$S=\frac{k}{a}\sum_{\varepsilon}\left\{(\mu-\varepsilon)\beta+\ln\left[e^{-(\mu-\varepsilon)\beta}+a-\beta a\frac{(\mu-\varepsilon)}{e^{-(\mu-\varepsilon)\beta}+a}\right]\right\}$$

$$=\frac{k}{a}\sum_{\varepsilon}\left\{-\ln\left(\frac{1}{\langle n_\varepsilon\rangle}-a\right)+\ln\left(\frac{1}{\langle n_\varepsilon\rangle}\right)+a\langle n_\varepsilon\rangle\ln\left(\frac{1}{\langle n_\varepsilon\rangle}-a\right)\right\}$$

$$=k/a\sum_{\varepsilon}\left\{\ln\left(\frac{1}{\langle n_\varepsilon\rangle}-a\right)\left(a\langle n_\varepsilon\rangle-1\right)-\ln\langle n_\varepsilon\rangle\right\}$$

براي بوزون ها $a=-1$

$$S=-k\sum_{\varepsilon}\left\{\ln\left(\frac{1+\langle n_{\varepsilon}\rangle}{\langle n_{\varepsilon}\rangle}\right)\left(-\langle n_{\varepsilon}\rangle-1\right)-\ln\langle n_{\varepsilon}\rangle\right\}$$

$$\Rightarrow S=k\sum_{\varepsilon}\left[\left(\langle n_{\varepsilon}\rangle+1\right)\ln\left(\langle n_{\varepsilon}\rangle+1\right)-\langle n_{\varepsilon}\rangle\ln\langle n_{\varepsilon}\rangle-\ln\langle n_{\varepsilon}\rangle+\ln\langle n_{\varepsilon}\rangle\right]$$

$$S=k\sum_{\varepsilon}\left[\left(\langle n_{\varepsilon}\rangle+1\right)\ln\left(\langle n_{\varepsilon}\rangle+1\right)-\langle n_{\varepsilon}\rangle\ln\langle n_{\varepsilon}\rangle\right]$$

براي فرميون ها $a=1$

$$a=1\Rightarrow S=k\sum_{\varepsilon}\left\{\ln\left(\frac{1-\langle n_{\varepsilon}\rangle}{\langle n_{\varepsilon}\rangle}\right)\left(\langle n_{\varepsilon}\rangle-1\right)-\ln\langle n_{\varepsilon}\rangle\right\}$$

$$S=k\sum_{\varepsilon}\left[-\langle 1-n_{\varepsilon}\rangle\ln\langle 1-n_{\varepsilon}\rangle-\langle n_{\varepsilon}\rangle\ln\langle n_{\varepsilon}\rangle\right]$$

$$S=-k\sum_{\varepsilon}\left\{\sum_{\varepsilon} p_{\varepsilon}(n)\ln p_{\varepsilon}(n)\right\}$$

for Fermions

$$S=-k\sum_{\varepsilon} p_{\varepsilon}(\circ)\ln p_{\varepsilon}(\circ)+p_{\varepsilon}(1)\ln p_{\varepsilon}(1)$$

$$S=k\sum_{\varepsilon}\left\{-\left\langle 1-n_{\varepsilon}\right\rangle\ln\left\langle 1-n_{\varepsilon}\right\rangle-\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle\ln\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle\right\}$$

For Bosons

$$\sum_{\varepsilon}^{\infty} p_{\varepsilon}(n)\ln p_{\varepsilon}(n)=\sum_{n}\frac{\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle^{n}}{\left(\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle+1\right)^{n+1}}\ln\frac{\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle^{n}}{\left(\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle+1\right)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{\left(\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle+1\right)}\sum_{n}\left(\frac{\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle}{\left(\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle+1\right)}\right)^{n}\left[n\ln\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle-(n+1)\ln(\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle+1)\right]$$

$$\frac{1}{\left(\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle+1\right)}\left[\ln\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle\sum_{n=\circ}^{\infty} n\left(\frac{\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle}{\left(\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle+1\right)}\right)^{n}-\ln\left\langle n_{\varepsilon}+1\right\rangle\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle}{\left(\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle+1\right)}\right)^{n}\right]$$

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle}{\left(\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle+1\right)}\right)^{n}=\left\langle n_{\varepsilon}+1\right\rangle$$

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} n\left(\frac{\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle}{\left(\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle+1\right)}\right)^{n}=\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle\left\langle n_{\varepsilon}+1\right\rangle$$

$$\Rightarrow\sum_{n=\circ}^{\infty} p_{\varepsilon}(n)\ln p_{\varepsilon}(n)=\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle\ln\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle-\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle\ln\left\langle n_{\varepsilon}+1\right\rangle-\ln\left\langle n_{\varepsilon}+1\right\rangle$$

$$=\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle\ln\left\langle n_{\varepsilon}\right\rangle-\left\langle n_{\varepsilon}+1\right\rangle\ln\left\langle n_{\varepsilon}+1\right\rangle$$

$$S=-k\sum_{\varepsilon}\left\{\sum_{n} p_{\varepsilon}(n)\ln p_{\varepsilon}(n)\right\}$$

۶-۲ برای هر ۳ آمار، عبارتهای مربوط به کمیت $\langle n_\varepsilon^2\rangle-\langle n_\varepsilon\rangle^2$ را با در نظر گرفتن احتمال های $P_\varepsilon(n)$ مربوطه استنتاج کنید نشان دهید که بطور کاملاً عمومی

$$\langle n_\varepsilon^2\rangle-\langle n_\varepsilon\rangle^2=kT\left(\frac{\partial\langle n_\varepsilon\rangle}{\partial\mu}\right)_T$$

با نتایج مشابه (۴-۵-۳) برای سیستمی که درآنسامبل کانونیک بزرگ قرار گرفته است مقایسه کنید

حل:

$$\overline{(\Delta N)^2}=\overline{N^2}-\overline{N}^2=\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\ln D=z\frac{\partial}{\partial z}\overline{N}=kT\left(\frac{\partial\overline{N}}{\partial\mu}\right)$$ -۴)

(۵-۵

$$F.D:\ \langle n_\varepsilon\rangle=p_\varepsilon(1)$$

$$\langle n_\varepsilon^2\rangle=\sum_{n=\circ}^{1}n_\varepsilon^2p_\varepsilon(n)=p_\varepsilon(\circ)\times\circ+1\times p_\varepsilon(1)=p_\varepsilon(1)=\langle n_\varepsilon\rangle$$

$$\langle n_\varepsilon^2\rangle-\langle n_\varepsilon\rangle^2=p_\varepsilon(1)-p_\varepsilon^2(1)=\langle n_\varepsilon\rangle-\langle n_\varepsilon\rangle^2=\overline{n}_\varepsilon\left(1-\overline{n}_\varepsilon\right)$$

$$B.E:\ p_\varepsilon(n)=\frac{\langle n_\varepsilon\rangle^n}{\langle n_\varepsilon+1\rangle^{n+1}}\quad;\quad x=\langle n_\varepsilon\rangle$$

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}p_\varepsilon(n)=\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{x^n}{(x+1)^{n+1}}=\frac{1}{1+x}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)^n}=\frac{1}{1+x}\sum_{n=\circ}^{\infty}X^n\ ,\ X=\frac{x}{1+x}$$

$$=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-X}=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1+x}{1+x-x}\quad\Rightarrow$$

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}p_\varepsilon(n)=1$$

$$\langle n_\varepsilon\rangle=\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{nx^{n}}{(1+x)^{n}}=\frac{1}{1+x}\sum_{n=\circ}^{\infty}nX^{n}$$

$$=\frac{1}{1+x}\left(X\frac{\partial}{\partial X}\right)\sum_{n=\circ}^{\infty}X^{n}=\frac{1}{1+x}\left(X\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(\frac{1}{1-X}\right)$$

$$=\frac{1}{1+x}\frac{X}{(1-X)^{2}}=x$$

$$\langle n_\varepsilon^2\rangle=\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{n^2x^{n}}{(1+x)^{n+1}}=\frac{1}{1+x}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{n^2x^{n}}{(1+x)^{n}}=\frac{1}{1+x}\sum_{n=\circ}^{\infty}n^2X^{n}$$

$$=\frac{1}{1+x}\left(X\frac{\partial}{\partial X}\right)^2\sum_{n=\circ}^{\infty}X^{n}=\frac{1}{1+x}\left(X\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(X\frac{\partial}{\partial X}\right)\frac{1}{1-X}=2x^2+x\ \Rightarrow$$

$$\langle n_\varepsilon^2\rangle-\langle n_\varepsilon\rangle^2=2x^2+x-x^2=\langle n_\varepsilon^2\rangle+\langle n_\varepsilon\rangle=\overline{n_\varepsilon}^{\,2}+\overline{n_\varepsilon}=\overline{n_\varepsilon}\left(1+\overline{n_\varepsilon}\right)\ \Rightarrow$$

$$\sigma^2=\langle n_\varepsilon^2\rangle-\langle n_\varepsilon\rangle^2\ \Rightarrow$$

$$\sigma^2=\begin{cases}\overline{n_\varepsilon}\left(1+\overline{n_\varepsilon}\right) & B.E\\ \overline{n_\varepsilon} & M.B\\ \overline{n_\varepsilon}\left(1-\overline{n_\varepsilon}\right) & F.D\end{cases}$$

در حالت كلي بايد ثابت كنيم:

$$\langle n_\varepsilon^2\rangle-\langle n_\varepsilon\rangle^2=kT\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\langle n_\varepsilon\rangle\right)_T$$

$$F.D:\langle n_\varepsilon^2\rangle-\langle n_\varepsilon\rangle^2=\overline{n_\varepsilon}\left(1-\overline{n_\varepsilon}\right)$$

$$=\frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}-\frac{1}{\left(1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\right)^2}=\frac{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}{\left[1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\right]^2}$$

(۱)

$$\overline{n_\varepsilon}=\langle n_\varepsilon\rangle=\frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\langle n_\varepsilon\rangle=\frac{\beta e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}{\left[1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\right]^2}\Rightarrow$$

$$\langle n_\varepsilon^2\rangle-\langle n_\varepsilon\rangle^2=kT\frac{\partial}{\partial\mu}\langle n_\varepsilon\rangle=\frac{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}{\left[1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\right]^2} \qquad (۲)$$

از مقایسه (1) و (2) مي‌بينيم که هر دو نتيجه يکسان است.

۵-۶ نشان دهید که خطای جذر میانگین مربعی در انرژی مولکولی ε در سیستمی که از توزیع ماکسول بولتزمن پیروی می کند $\sqrt{\frac{2}{3}}$ برابر انرژی میانگین مولکولی $\bar{\varepsilon}$ است این نتیجه را با یک سیستم گاز ایده آل در آنسامبل کانونی (مساله ۳-۱۸) مقایسه کنید .

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\langle E\rangle=\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle\\[2ex] \langle v^2\rangle=\frac{3kT}{m}\end{array}\right\}\Rightarrow\langle E\rangle=\frac{1}{2}m\left(\frac{3kT}{m}\right)=\frac{3}{2}kT$$

$$\langle(\Delta E)^2\rangle=\langle E^2\rangle-\langle E\rangle^2 \quad , \quad \langle E^2\rangle=\frac{1}{4}m^2\langle v^4\rangle$$

$$.\ \langle v^4\rangle=\int_{\circ}^{\infty} v^4 f(v)dv=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_{\circ}^{\infty} v^6 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv$$

$$m=2r \quad , \quad r>\circ \quad \Rightarrow \quad I_{2r}=\frac{(2r-1)!!}{2^{r+1}}\left(\frac{\pi}{\alpha^{2r+1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r=3 \;\Rightarrow\; I_6=\frac{(5)!!}{24}\left(\frac{\pi}{\alpha^7}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\langle v^4\rangle=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}.\frac{15}{16}\sqrt{\pi}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{7}{2}}$$

$$=\frac{15}{4}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{4}{2}}$$

$$\langle v^4\rangle=\frac{15}{4}.4\left(\frac{kT}{m}\right)^2 \;\Rightarrow\; \langle v^4\rangle=15\left(\frac{kT}{m}\right)^2$$

$$\langle(\Delta E)^2\rangle=\langle E^2\rangle-\langle E\rangle^2=\frac{15}{4}(kT)^2-\frac{9}{4}(kT)^2=\frac{3}{2}(kT)^2$$

$$\sqrt{\langle(\Delta E)^2\rangle}=\sqrt{\frac{3}{2}}(kT)$$

$$\langle E\rangle=\frac{3}{2}kT \;\Rightarrow\; kT=\frac{2}{3}\langle E\rangle \;\Rightarrow\; \sqrt{\langle(\Delta E)^2\rangle}=\sqrt{\frac{2}{3}}\langle E\rangle$$

۶-۶ نشان دهید که برای هر قانون توزیع سرعتهای مولکولی نامساوی زیر باید برقرارمي باشد نشان دهید که مقدار این کمیت براي توزیع ماکسول - بولتزمن برابر با $\frac{\pi}{4}$ است.

حل:

$$\langle u\rangle=\int_{\circ}^{\infty}u\,f\,(u)\,du$$

$$f\,(u)\,du=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mu^2}{2kT}}d^3u$$

$$\langle u\rangle=\int_{\circ}^{\infty}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mu^2}{2kT}}u\left(4\pi u^2\right)du$$

$$=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_{\circ}^{\infty}e^{-\frac{mu^2}{2kT}}u^3du$$

$$u=y\quad,\quad\frac{m}{2kT}=\alpha\ \Rightarrow\ \int_{\circ}^{\infty}e^{-\frac{mu^2}{2kT}}u^3du=\int_{\circ}^{\infty}e^{-\alpha y^2}y^3dy$$

$$I=\int_{\circ}^{\infty}e^{-\alpha y^2}y^3dy=\frac{1}{2\alpha}\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)$$

$$I=\frac{1}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)}\Gamma(2)=\frac{(2kT)^2}{2m^2}\quad\Rightarrow$$

$$\langle u\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\times\frac{(2kT)^2}{2m^2} = \frac{2^{\frac{3}{2}}(kT)^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}} = 2\left(\frac{2kT}{m\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(۱)

$$\langle\frac{1}{u}\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_{\circ}^{\infty} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u\,du$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)}\Gamma(1) = \left(\frac{2m}{\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \langle u\rangle\langle\frac{1}{u}\rangle = 2\left(\frac{2kT}{m\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2m}{\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \left\{\langle u\rangle\ \langle\frac{1}{u}\rangle\right\} \geq 1$$

۶-۷ از طریق یک پنجره کوچک در یک کوره که محتوی گاز در دمای بالای T است خطوط طیف گسیل شده توسط مولکول های گاز مشاهده شده اند به خاطر حرکتهای مولکولی هر خط طیفی یک پهن شدگی دو پلری دارا می باشد. نشان دهید که تغییر شدت نسبی $I(\lambda)$ با طول موج λ در یک خط با رابطه زیر داده می شود.

$$I(\lambda) \propto \exp\left\{-\frac{mc^2(\lambda-\lambda_\circ)^2}{2\lambda_\circ^2 kT}\right\}$$

که در این رابطه m جرم مولکولی c سرعت نور و $\lambda_\circ$ طول موج میانگین خط است.

حل:

از نظر مشاهده گر از میان روزنه اي در طرف آزمايش نورهايي با طول موج $\lambda_\circ$ متوسط مولكوهايي كه مؤلفه v_x سرعتشان در جهت نور تابيده شده است. طول موج نور برابر است با:

$$\lambda=\lambda_\circ\left(1+\frac{v_x}{c}\right)\ \Rightarrow\ \lambda=\lambda_\circ+\frac{\lambda_\circ v_x}{c}\quad\Rightarrow$$

$$c\left(\lambda-\lambda_\circ\right)=\lambda_\circ v_x\ \ \Rightarrow\ \ v_x=c\,\frac{\lambda-\lambda_\circ}{\lambda_\circ}$$

بنابراین با استفاده از توزیع ماکسول با فرض اینکه چگالي مولکولي در ظرف n باشد خواهیم داشت:

$$I(\lambda)\propto n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\right\}dv_y\,dv_x$$

$$=n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(\frac{-mv_x^2}{2kT}\right)\ \Rightarrow\ \ I(\lambda)\propto\exp\left(\frac{-mv_x^2}{2kT}\right)$$

$$I(\lambda)\propto\exp\left[\frac{-mc^2}{2kT}\left(\frac{\lambda-\lambda_\circ}{\lambda_\circ}\right)^2\right]\Rightarrow$$

$$I(\lambda)\propto\exp\left[\frac{-mc^2\left(\lambda-\lambda_\circ\right)^2}{2\lambda_\circ^2kT}\right]$$

۸-۶ یک گاز کلاسیکی ایده آل متشکل از N ذره هر یک به جرم m که در یک استوانهٔ عمودی به طول L محصور شده است. در یک میدان گرانشی ثابت (با شتاب g) قرار گرفته و در تعادل گرمایی می باشد در نهایت هر دو L,N به سمت بی نهایت میل می کنند تابع پارش گاز را ارزیابی کنید و عباراتی برای کمیت های ترمودینامیکی مهم بدست آورید.
توضیح دهید که چرا گرمای ویژه این سیستم از سیستم مشابه در فضای آزاد بزرگتر است.

✎ حل:

$$H=\frac{p^2}{2m}+mg\left|z\right|$$

$$Q_1=\frac{1}{h^3}\int_{\circ}^{R}\rho d\rho\int_{\circ}^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-mg\beta|z|}dz\int e^{-\frac{p^2}{2m}}d^3p$$

$$Q_1=\frac{4\pi}{h^3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\right)2\pi\frac{R^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta mg|z|}dz$$

$$Q_1=\frac{\pi R^2}{h^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\beta mg}e^{+\beta mgz}\Big|_{-\infty}^{\circ}-\frac{1}{\beta mg}e^{-\beta mgz}\Big|_{\circ}^{\infty}\right]$$

$$Q_1=\frac{\pi R^2}{h^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\beta mg}+\frac{1}{\beta mg}\right]$$

$$Q_1=\frac{\pi R^2}{h^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{\beta mg}=\frac{R^2}{m^2gh^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$Q_1=\frac{R^2}{m^2gh^3}\left[2\pi mkT\right]^{\frac{5}{2}}\quad,\quad Q_N=\frac{1}{N!}Q_1^N\quad\Rightarrow$$

$$Q_N=\frac{1}{N!}\left[\frac{R^2}{m^2gh^3}\left(2\pi mkT\right)^{\frac{5}{2}}\right]$$

$$U=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(Q_N\right) \quad\Rightarrow\quad \ln Q_N=-\ln N!+N\ln\left[\frac{R^2}{m^2gh^3}\left(2\pi m\right)^{\frac{5}{2}}\beta^{-\frac{5}{2}}\right]$$

$$U=N\,\frac{\frac{5}{2}\frac{R^2}{m^2gh^3}\left(2\pi m\right)^{\frac{5}{2}}\beta^{-\frac{7}{2}}}{\frac{R^2}{m^2gh^3}\left(2\pi m\right)^{\frac{5}{2}}\beta^{-\frac{7}{2}}}=\frac{5}{2}N\beta^{-1}=\frac{5}{2}NkT$$

$$C_V=\frac{\partial U}{\partial T}=\frac{5}{2}Nk \quad\Rightarrow\quad C_V=\frac{5}{2}Nk$$

$$A=-kT\ln Q_N=-kT\ln\left\{\frac{1}{N!}\left[\frac{R^2}{m^2gh^3}\left(2\pi mkT\right)^{\frac{5}{2}}\right]^N\right\}$$

$$B=\frac{R^2}{m^2gh^3}\left(2\pi m\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$A=-kT\ln\left\{\frac{1}{N!}\left[B\left(kT\right)^{\frac{5}{2}}\right]^N\right\}$$

$$=-kT\left\{-\ln N!+N\ln\left[B\left(kT\right)^{\frac{5}{2}}\right]\right\}$$

$$S=-\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{N,V} \quad , \quad P=-\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T} \quad , \quad \mu=\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T}$$

$$C_p=T\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)=\frac{\partial}{\partial T}\left(U+PV\right)$$

توزیع دانسیته ذرات در حجم اشغال شده توسط گاز در صورتیکه ذرات آزاد فرض شوند یك توزیع یکنواخت است و تعداد ذرات در واحد حجم که مومنتم آنها بین $\mathbf{p}$ و $\mathbf{p}+d\mathbf{p}$ یا سرعت آنها بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{u}+d\mathbf{u}$ است برابر است با $dN_p=nf(p)dp$ یا $dN_v=nf(u)du$ اما اگر گاز در یك میدان خارجي نیز قرار گیرد که در آن انرژي پتانسیل تنها به مختصات مرکز جرم آنها بستگي داشته باشد. مثلاً میدان جاذبه توزیع ماکسول سرعتها بدون تغییر مي ماند اما توزیع ذرات به شکل زیر کمیت است.

$$n(r)=n_\circ e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

C_V از C_V طبیعي بیشتر مي شود زیرا T و g را ثابت گرفته ایم که در حالت طبیعي چنین نیست.

۶-۹ (الف) نشان دهید که اگر دما یکنواخت باشد فشار یک گاز کلاسیکی در یک میدان گرانشی ثابت براساس فرمول با رومتری با ارتفاع کاهش می یابد. که نمادهای گوناگون همان معانی معمولشان را دارند.
(ب) فرمول متناظر برای یک اتمسفر بی در رو یعنی وقتی که در آن PV^γ به جای PV، ثابت می ماند را بدست آورید همچنین تغییرات ارتفاع، دما و چگالی اتمسفر را بررسی کنید.

حل:
اگر در حضور یك میدان خارجي باشد تابع توزیع به صورت زیر است.

$$f(\mathbf{r},\mathbf{u})\propto e^{-\beta E}=e^{-\beta\left(\frac{1}{2}mu^2+\varphi(r)\right)}$$

عامل $e^{-\beta\varphi(r)}$ را در دانسیته x وارد مي کنیم:

$$f(\mathbf{r},\mathbf{u}) \propto e^{-\beta\varphi(r)} f(\mathbf{u})$$

$$f(\mathbf{r},\mathbf{u}) = n(r) \times \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}m\frac{u^2}{kT}}$$

$$n(r) = \int d^3u\, f(\mathbf{r},\mathbf{u}) = n_\circ e^{\frac{-\varphi(r)}{kT}}$$

در این مسئله $\varphi(r) = mgz$.

$$f(z,u) = n_\circ e^{-\frac{mgz}{kT}} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}m\frac{u^2}{kT}}$$

از طرفي براي فشار مولکولهاي گاز داخل ظرف عبارت زير را بدست آوريم:

$$P = \frac{1}{3}n\langle pu\rangle \quad , \quad P = \frac{1}{3}n(r)\langle pu\rangle$$

$$P(z) = \frac{1}{3}n_\circ e^{-\frac{mgz}{kT}}\langle mu.u\rangle = \frac{1}{3}n_\circ e^{-\frac{mgz}{kT}}\langle mu^2\rangle$$

$$= \frac{1}{3}n_\circ e^{-\frac{mgz}{kT}} m\langle u^2\rangle \quad , \quad \langle u^2\rangle = \frac{3kT}{m}$$

$$P(z) = \frac{1}{3}n_\circ e^{-\frac{mgz}{kT}} m\frac{3kT}{m} = n_\circ kT\, e^{-\frac{mgz}{kT}} \Rightarrow P(z) = P_\circ e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

که

$$P_\circ = n_\circ kT$$

روش دوم قسمت الف

$$PV = P_\circ V_\circ = cte \;\; ; \;\; PA = \left(P + dP\right)A + \rho g A\,dz$$

$$mg = \rho V g = \rho A\,dz g$$

$$PA = PA + A\,dP + \rho g A\,dz \quad \Rightarrow \quad dP = -\rho g dz$$

از طرفي

$$PV = NkT \quad \Rightarrow \quad N = \frac{PV}{kT} \quad , \quad n = \frac{N}{V} = \frac{P}{kT}$$

$$dp = -\frac{mN}{V} g dz = -\frac{mpgdz}{kT} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT} dz$$

$$p\left(z\right) = p\left(\circ\right)\exp\left(\frac{-mgz}{kT}\right)$$

ب)

$$p\mathrm{V}^{\gamma} = cte \quad , \quad \mathrm{V}^{\gamma} = \frac{c}{p} \;\; \Rightarrow \;\; \mathrm{V}^{-1} = \left(\frac{p}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \Rightarrow \; p\mathrm{V}^{\gamma} = p_\circ \mathrm{V}_\circ^{\gamma} \; \Rightarrow \; c = p_\circ \mathrm{V}_\circ^{\gamma}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{M}{V} g = -M\left(\frac{p}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}} g \quad \Rightarrow \quad p^{\frac{-1}{\gamma}} dp = -\frac{M}{C^{\frac{1}{\gamma}}} g dz$$

رابطه بين فشار و ارتفاع در تحول آدياباتيك:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT} dz$$

$$\frac{1}{1-1/\gamma} p^{1-1/\gamma}\Big|_{p_\circ}^{p} = -\frac{M}{c^{1/\gamma}} zg\Big|_{\circ}^{z}$$

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_{\circ}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{M}{\left(p_{\circ}V_{\circ}^{\gamma}\right)^{1/\gamma}} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\cdot\frac{M}{p_{\circ}^{\frac{1}{\gamma}}V_{\circ}}$$

$$p(z) = \left[p_{\circ} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Mg}{p_{\circ}^{\frac{1}{\gamma}}V_{\circ}}z\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

۶-۱۱ (الف) با در نظر گرفتن اتلاف انرژی انتقالی که بوسیله مولکولهای یک گاز در انعکاس از یک دیوار در حال عقب نشینی تلف می شود. برای یک انبساط بی در رو مربوط به یک گاز غیر نسبیتی ایده آل در حالت شبه ایستا فرمول مشهور

$$PV^{\gamma} = const$$

را بدست آورید که درآن $\gamma = \frac{3a+2}{3a}$ و a نسبت انرژی کل به انرژی انتقالی گاز است.

(ب) نشان دهید که در مورد یک گاز فرین نسبیتی $\gamma = \frac{3a+2}{3a}$

حل:

مي توانيم برخورد را الاستيك و در دستگاه مرجع را ديوار (با فرض تعادل گرمايي) در نظر بگيريم. آنگاه در چارچوب آزمايشگاه:

$$\left(\mathbf{v}_f^{rel}\right)_z = -\left(\mathbf{v}_i^{rel}\right)_z \;\Rightarrow\; \left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\circ}\right)_z = -\left(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_{\circ}\right)_z$$

$$\left(\mathbf{v}_f\right)_z = -\left(\mathbf{v}_i\right)_z + 2\mathbf{v}_{\circ}$$

از رابطه (۶-۴-۷) داریم:

$$P = n \int_{v_z > \circ} \Delta p_z \, v_z \, f\left(\mathbf{v}\right) d^3 v$$

$$= n \int_{v_z > \circ} 2\left(p_z - m v_\circ\right) v_z \, f\left(\mathbf{v}\right) d^3 v$$

$$P = \frac{1}{3} n \langle p v \rangle - n m v_\circ 2 \int f\left(\mathbf{v}\right) v^2 dv \, v \int_\circ^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta cos\theta$$

(۶-۴-

$$\int_\circ^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{3} n \langle p v \rangle - \frac{n}{4} m v_\circ \langle v \rangle$$

۹)

انرژي جنبشي انتقالي عبارتست از:

$$= \delta t \, \delta A \, n \int_{v_z > \circ} \left[\frac{1}{2} m \left(\mathbf{v}_f^2 + \mathbf{v}_i^2 \right) \right] v_z \, f\left(\mathbf{v}\right) d^3 v$$

$$= -\delta t \, \delta A \, n \int_{v_z > \circ} \frac{1}{2} m \left(-4 v_z v_\circ - 4 v_\circ^2 \right) v_z \, f\left(\mathbf{v}\right) d^3 v$$

$$= -\delta t \, \delta A \, n \frac{1}{3} \langle p v \rangle v_\circ = -\frac{n}{3} \langle P v \rangle \delta V \approx -P \delta V$$

در فرآيند شبه پايدار نسبت انرژي جنبشي انتقالي به ساير انواع انرژي ثابت مي‌ماند.

$$\delta K_{trans} = \delta \left[N \langle \frac{P v}{2} \rangle \right] = \frac{K_{trans}}{E} \delta K_{trans}^{"inst"}$$

$$= \frac{1}{a} \delta K_{trans}^{"inst"} = -\frac{n}{3a} \langle P v \rangle \delta V \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\delta\langle Pv\rangle}{\langle Pv\rangle}=-\frac{2}{3a}\frac{\delta V}{V}\quad\frac{\langle Pv\rangle}{\langle Pv\rangle_{\circ}}=\left(\frac{V}{V_{\circ}}\right)^{-\frac{2}{3a}}$$

$$p\approx\frac{1}{3}\frac{N}{V}\frac{\langle p_{v}\rangle_{\circ}}{V_{\circ}^{-\frac{2}{3\alpha}}}V^{-\frac{2}{3\alpha}}\quad\Rightarrow\quad PV^{-\frac{2}{3\alpha}+1}=\frac{1}{3}N\frac{\langle pv\rangle_{\circ}}{V_{\circ}^{-\frac{2}{3\alpha}}}=const$$

۶- ۱۵ دو گاز بولترمنی B,A به ترتیب در فشار های P_A, P_B و دماهای T_A و T_B در دو منطقه از فضا در نظر بگیرید که ارتفاع میان آنها یک روزنه خیلی تنگ در دیواره تفکیک کننده آنهاست. شکل ۸-۶ را نگاه کنید.

A (P_A, T_A)	B (P_A, T_A)

شکل ۸-۶
مولکولکهای گازهای B,A تحت یک نفوذ مولکولی دو متقابل

نشان دهید که تعادل دینامیکی نتیجه شده از نفوذ متقابل دو نوع مولکول به جای $P_A = P_B$ که نتیجه حاصل از تعادل شار هید رو دینامیکي است شرط $\frac{P_A}{P_B}=\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{2}}$ را ارضا بر اورده مي كند.

حل:

با استفاده از (۶-۴-۹) و (۶-۴-۱۳) یکبار براي سیستم A و یکبار براي B

$$\begin{cases} R_A \alpha_m \overline{U}^*_{zA} = \frac{1}{2} P_A \alpha \\ R_B \alpha_m \overline{U}^*_{zB} = \frac{1}{2} P_B \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{R_A \overline{U}^*_{zA}}{R_B \overline{U}^*_{zB}} = \frac{P_A}{P_B}$$

در حالت انتقال دینامیکي باید در اندازه حرکتي که سیستم A به سیستم B منتقل مي شود به مقدار اندازه حرکتي باشد که از سیستم B به A منتقل مي‌شود و یا به عبارت دیگر:

$$\overline{P}^*_{zA} = \overline{P}^*_{zA} \quad \text{یا} \quad \overline{U}^*_{zA} = \overline{U}^*_{zA} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{P_A}{P_B}$$

با استفاده از فرمولهاي (۶-۴-۱۱) و (۶-۴-۱۹).

$$R = \frac{1}{4} n \langle U \rangle = n \left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{P_A}{P_B}$$

۶-۱۶ یک کره کوچک با دمای اولیه T در یک گاز بولتزمنی ایده آل در دمای $T_\circ$ شناور شده است فرض کنید مولکولهای برخورد کننده روی کره اول جذب شده و سپس با دمای کره دوباره منتشر می شوند تغییرات دمایی کره را با زمان تعیین کنید .
[توجه شعاع کره را می توان خیلی کوچکتر از مسیر آزاد میانگین مولکول ها فرض کرد]
نشان دهید که مقدار میانگین سرعت نسبی دو مولکول در یک گاز ماکسولی$\sqrt{2}$ برابر سرعت میانگین یک مولکول نسبت به دیواره های محفظه است.
[یادآوری می کنیم که یک نتیجه مشابه برای سرعت های جذر میانگین مربعی به جای سرعت های میانگین تحت شرایط عمومی تر بیشتری حفظ می شود]

حل:

تعداد ذراتي كه به سطح كره برخورد مي كنند برابر است با تعداد ذراتي كه در پوسته كروي به ضخامت $(\mathbf{ur})dr$ قرار دارند و اين تعداد برابر است با:

$$4\pi r^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})dr.nf(u)du$$

$$S(\mathbf{u}.\mathbf{r})nf(u)du=S\left(u_x+u_y+u_z\right)nf(u)du$$

$$=\frac{1}{2}S\left[\int_{-\infty}^{\infty}u_x\,nf(u)du+\int_{-\infty}^{\infty}u_y\,nf(u)du+\int_{-\infty}^{\infty}u_z\,nf(u)du\right]$$

T_iدماي اوليه كره و T_f دماي نهايي كره

$$\Rightarrow\quad R=S_n\frac{3}{4}\langle u\rangle$$

تغيير انرژي در واحد زمان

$$\Delta T=\frac{1}{C_V}\Delta\bar{u}=\frac{1}{C_V}\left[u(T)-u(T_\circ)\right]$$

$\Delta\bar{u}$ تغيير انرژي هر ذره در واحد زمان مي باشد.

$$\frac{\Delta T}{\Delta t}=-\frac{1}{C_V}.\frac{3}{4}n\left(\frac{2kT}{\hbar m}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{2}k\left(T-T_\circ\right)\right]$$

$$\int_{T_i}^{T_f}\frac{dT}{T-T_\circ}=\int-\frac{n}{C_V}\frac{3}{4}n\left(\frac{2kT}{\hbar m}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}k\,dt$$

$$\left(T_f-T_i\right)=\left(T_i-T_\circ\right)\exp\left[\frac{-N}{C_V V}\frac{9}{8}\left(\frac{8kT}{mc}\right)^{\frac{1}{2}}\left(t-t_\circ\right)\right]$$

۶-۲۲ انرژي پتانسيل ميان اتمهاي هدروژن در مولكول آن با پتانسيل مورس داده مي شود

$$V(r)=V_{\circ}\left\{e^{-2(r-r_{\circ})/a}-2e^{-2(r-r_{\circ})/a}\right\}$$

که $V_{\circ}=7\times10^{-12}erg$ و $r_{\circ}=8\times10^{-9}cm$ و $a=5\times10^{-9}cm$ کوانتاي انرژي هاي ارتعاشي و چرخشي را محاسبه كنيد. دما هايي را بر اورد كنيد كه در ان دما مد هاي ارتعاشي و چرخشي مولكول در ظرفيت گرمايي ويژه گاز هيدروژن سهيم هستند.

حل:

مولكول هيدروژن

$$V(r)=V_{\circ}\left[e^{\frac{-2(r-r_{\circ})}{a}}-2e^{\frac{-(r-r_{\circ})}{a}}\right]$$

در حالت تعادل

$$\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=\tilde r}=\circ \Rightarrow \frac{V_{\circ}}{a}\left[-2e^{\frac{-2(\tilde r-r_{\circ})}{a}}+2e^{\frac{-(\tilde r-r_{\circ})}{a}}\right]=\circ \quad , \quad \Rightarrow \tilde r=r_{\circ}$$

$$\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_{\circ}}=\frac{V_{\circ}}{a^2}\left[4e^{\frac{-2(r_{\circ}-r_{\circ})}{a}}-2e^{\frac{-(r_{\circ}-r_{\circ})}{a}}\right]=\frac{2V_{\circ}}{a^2}$$

$$=\frac{1/\circ545\times1\circ^{-27}}{1/38\circ5\times1\circ^{-16}}\left[\frac{4\times7\times1\circ^{-12}}{1/67343\times1\circ^{-24}\left(5\times1\circ^{-9}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}=625\circ^{\circ}K$$

در دمای اتاق

$$=\circ/54eV\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad , \quad T\approx3\circ\circ^{\circ}K$$

$$\Theta_n^{rot}=l\left(l+1\right)\frac{\hbar^2}{2I}=l\left(l+1\right)K\Theta_r$$

$$=\frac{1/38\circ5\times1\circ^{-23}}{1/6\circ2\times1\circ^{-19}}75/21^{\circ}Kl\left(l+1\right)=\circ/\circ\circ65eVl\left(l+1\right)$$

در دمای اتاق $T \approx 3\circ\circ^{\circ}K$ مد ارتعاشی غیر فعال است و مد دورانی کاملاً فعال می باشد.

۶-۱۰ قدیم

يك استوانه با شعاع R و طو لL با سرعت زاويه اي ثابت ω حول محورش مي چرخد. تابع پارش ان را بدست آوريد. وهم چنين تابع توزيع يك گاز ايده ال محصور شده درون ان را بدست آوريد.فرض كنيد كه گاز در تعادل گرمايي در دماي T است و اثرات گرانشي قابل چشم پوشي هستند.

توجه كنيد كه هاميلتونين يك سيستم فيزيكي در يك چارچوب مرجع چرخشي با رابطه H′=H−ωL داده مي شود كه H هاميلتونين در چارچوب ازمايشگاهي و L اندازه حركت زاويه اي است.

حل:

$$H=\frac{P^2}{2m}+L\omega \quad , \quad Q_1=\sum e^{-\beta H} \quad , \quad \sum \rightarrow \frac{1}{h^3}\int$$

$$Q_1=\frac{1}{h^3}\int e^{-\beta\left(\frac{P^2}{2m}+L\omega\right)}d^3p\,d^3q$$

$$L=r\times p=\rho p\sin\varphi \quad \Rightarrow$$

$$Q_1=\frac{4\pi}{h^3}\int p^2 e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} e^{-\beta\rho\sin\varphi p\omega}\rho d\rho d\varphi dz$$

$$=\frac{8\pi^2 L}{h^3}\int p^2 e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} e^{-\beta\rho p\,\omega\sin\varphi} d\rho dp$$

$$=-\frac{8\pi^2 L}{\beta\omega h^3}\int p e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\left(e^{-\beta\omega R p}-1\right)dp$$

$$=\frac{8\pi^2 L}{\beta\omega h^3}\left\{\int p e^{-\beta\frac{p^2}{2m}-\beta\omega R p}dp-\int p e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}dp\right\}\quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\beta}{2m}\\ \gamma=\beta\omega R\end{cases}\quad\begin{cases}p+\dfrac{1}{2\alpha}=u\\ dp=du\end{cases}$$

$$\int p e^{-\alpha p^2-\gamma p}dp=e^{\frac{\gamma^2}{4\alpha}}\int p e^{-\alpha\left(p+\frac{\gamma^2}{2\alpha}\right)^2}dp$$

$$=e^{\frac{\gamma^2}{4\alpha}}\left\{\int_\circ^\infty u e^{-\alpha u^2}du-\frac{\gamma}{2\alpha}\int_\circ^\infty e^{-\alpha u^2}dp\right\}$$

(۱)

$$=e^{\frac{\gamma^2}{4\alpha}}\left[\frac{3}{8}\sqrt{\pi}\gamma^{-\frac{5}{2}}-\frac{\gamma}{2\alpha}.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right]$$

$$\int pe^{-\alpha p^2}dp = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha p^2}\Big|_{\circ}^{\infty} = -\frac{1}{2\alpha}$$

(٢)

$$Q_1 = \frac{8\pi^2 L}{\beta\omega\hbar^3}\left\{e^{-\gamma^2/4\alpha}\left[\frac{3}{8}\sqrt{\pi}\gamma^{-\frac{5}{2}} - \frac{\gamma}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right] + \frac{1}{2\alpha}\right\}$$

از طرفي توزيع دانستيه:

$$PV = nkT \quad , \quad \frac{N}{V} = \frac{P}{kT} = n$$

$$p = kT\,\frac{\partial}{\partial V}\ln Q_{\circ}$$

تعداد ذراتي كه بين p و $p+dp$ قرار گرفته يعني تابع توزيع ذرات $n(p)dp$.

فصل 7

۲-۷ بسط ویریال (۷-۱-۱۳) را از معادله هاي (۷-۱-۷) و (۷-۱-۸) بدست آورید و مقادیر ذکر شده از ضرایب ویریال را بررسي کنید.

حل:

$$\frac{PV}{kT}=\sum_n\sum_\varepsilon \frac{z^n e^{-n\beta\varepsilon}}{n}=\sum_n \frac{z^n}{n}\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_\circ^\infty e^{-n\beta\varepsilon}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

$$I=\int_\circ^\infty e^{-n\beta\varepsilon}\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon$$

$$n\beta\varepsilon=t \quad\Rightarrow\quad d\varepsilon=\frac{dt}{n\beta}$$

$$I=(\frac{1}{n\beta})^{3/2}\int_\circ^\infty dt\; e^{-t}t^{\frac{1}{2}}=(\frac{1}{n\beta})^{3/2}\Gamma(\frac{3}{2})$$

$$I=(\frac{1}{n\beta})^{3/2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=(\frac{1}{n\beta})^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{PV}{kT}=\sum_n \frac{z^n}{n(n\beta)^{3/2}}\frac{2V}{h^3}(2m)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sum_n \frac{z^n}{n^{5/2}}\frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2}\sqrt{\pi}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

$$\frac{PV}{kT} = \sum_n \frac{z^n}{n^{5/2}} \frac{V}{\lambda^3}$$
(۱)

$$N = \sum_\varepsilon \frac{1}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon} - 1} = \sum_\varepsilon \frac{z e^{-\beta\varepsilon}}{1 - z e^{-\beta\varepsilon}} = \sum_\varepsilon \frac{x}{1-x}$$

$$x = z e^{-\beta\varepsilon} \quad , \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=\circ}^{\infty} x^n$$

$$= \sum_\varepsilon x\,(1 + x + x^2 + \ldots.) = \sum_n \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-n\beta\varepsilon}$$

$$\sum_\varepsilon \Rightarrow \int dE$$

$$\sum_\varepsilon z^n e^{-n\beta\varepsilon} = \int z^n \frac{2\pi V\,(2m)^{3/2}}{h^3} \varepsilon^{1/2} e^{-n\beta\varepsilon} d\varepsilon = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} z^n \int e^{-n\beta\varepsilon} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

$$\int e^{-n\beta\varepsilon} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \left(\frac{1}{n\beta}\right)^{3/2} \Gamma(3/2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V\,(2\pi m k T)^{3/2}}{n^{3/2} h^3} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V}{\lambda^3 n^{3/2}} z^n$$

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V}{\lambda^3} \frac{z^n}{n^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{V}{\lambda^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{3/2}}$$
(۲)

$$x=\frac{N\lambda^3}{V}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{3/2}}=1+\frac{z^2}{2^{3/2}}+\frac{z^3}{3^{3/2}}+\cdots=\frac{N\lambda^3}{V} \qquad (۳)$$

زیرا

$$z=a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots=a_1(z+\frac{z^2}{2^{3/2}}+\frac{z^3}{3^{3/2}}+0000)+a_2(z+\frac{z^2}{2^{3/2}}+000)^2+\cdots$$

با مقایسه دوطرف تساوی داریم

$$a_1=1 \qquad \frac{a_1}{2^{3/2}}+a_2=\circ \Rightarrow a_2=-\frac{1}{2^{3/2}}$$

$$\frac{a_1}{3^{3/2}}+a_3+a_2\frac{2}{2^{3/2}}=\circ \Rightarrow a_3=\frac{1}{4}-\frac{1}{3^{3/2}} \quad \Rightarrow$$

$$z=x+(-\frac{1}{2^{3/2}})x^2+(-\frac{1}{3^{3/2}}+\frac{1}{4})x^3+\cdots$$

$$z=x-\frac{1}{2^{3/2}}x^2+(\frac{1}{4}-\frac{1}{3^{3/2}})x^3+\ldots\ldots$$

این عبارت را در معادله (۱) قرار می دهیم و طرفین آن را در $\frac{1}{N}$ ضرب می کنیم.

$$\frac{PV}{NkT}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V}{N\lambda 3}\frac{\left[x-\frac{1}{2^{3/2}}x^2+(\frac{1}{4}-\frac{1}{3^{3/2}})x^3+\ldots\ldots\right]^n}{n^{5/2}}$$

$$=\frac{V}{N\lambda^3}\left[x-\frac{1}{2^{3/2}}x^2+(\frac{1}{4}-\frac{1}{3^{3/2}})x^3+\ldots\right]$$

$$+\frac{V}{N\lambda^3}\frac{1}{2^{5/2}}\left[x-\frac{1}{2^{3/2}}x^2+\ldots\right]^2$$

که در آن $x=\frac{N\lambda^3}{V}$ می باشد بنابراین:

$$\frac{PV}{NkT}=1-\frac{N\lambda^3}{2^{3/2}V}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3^{3/2}}\right)\left(\frac{N\lambda^3}{V}\right)^2+\frac{1}{2^{5/2}}\frac{N\lambda^3}{V}$$

$$-\frac{2}{2^{5/2}2^{3/2}}\left(\frac{N\lambda^3}{V}\right)^2+\frac{1}{3^{5/2}}(\frac{N\lambda^3}{V})^2+000$$

برحسب توانهای $\left(\frac{N\lambda^3}{V}\right)$ رابطه بالا را مرتب کرده و بنابر این ضرایب $\left(\frac{N\lambda^3}{V}\right)$ ضرایب ویریال خواهند بود.

$$\frac{PV}{NkT}=1+\frac{N\lambda^3}{V}\left[-\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{2^{5/2}}\right]$$

$$+\left(\frac{N\lambda^3}{V}\right)^2\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3^{3/2}}-\frac{2}{2^{5/2}2^{3/2}}+\frac{1}{2^{5/2}}\right]+\ldots.. \Rightarrow$$

$$\frac{PV}{NkT}=1+\left(\frac{N\lambda^3}{V}\right)\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{N\lambda^3}{V}\right)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9\sqrt{3}}\right)+\ldots.$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}a_l\left(\frac{N\lambda^3}{V}\right)^{l-1}=\sum_{l=1}^{\infty}a_l\,(\frac{\lambda^3}{\upsilon})^{l-1}$$

که $\upsilon=\frac{V}{N}$ مي باشد.

روش دوم:

از روابط (۷-۱-۷) و (۷-۱-۸) داریم:

$$\frac{P}{kT}=\frac{1}{\lambda^3}g_{5/2}(z) \qquad \frac{N}{V}=\frac{1}{\lambda^3}g_{3/2}(z)$$

$$g_n(z)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{l^n}$$

$$\frac{PV}{NkT}=\sum_{l=1}^{\infty}a_l\left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1} \qquad , \qquad v=\frac{1}{n}\ ,\ n=\frac{N}{V}\ ,\ v=\frac{V}{N}$$

$$\frac{P}{kT}\left(\frac{N}{V}\right)^{-1}=\sum_{l=1}^{\infty}a_l\left(\frac{\lambda^3 N}{v}\right)^{l-1}\Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{\lambda^3}g_{5/2}(z)}{\frac{1}{\lambda^3}g_{3/2}(z)}=\sum_{e=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^3 N}{v}\right)^{l-1}a_l$$

$$\frac{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{l^{3/2}}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{5/2}}}=\sum_l a_l\left(\lambda^3\frac{1}{\lambda^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^{3/2}}\right)^{l-1}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{l^{3/2}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{5/2}}\right)\sum_l a_l\left(\lambda^3\frac{1}{\lambda^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^{3/2}}\right)^{l-1}$$

پس از بسط جمله به جمله دو طرف و مقایسه ضرایب داریم:

$a_1 = 1$

$$\frac{1}{3^{5/2}} = a_2 + \frac{a_1}{2^{3/2}} \Rightarrow a_2 + \frac{a_1}{2^{3/2}} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2^{5/2}} - \frac{1}{2^{3/2}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{3^{5/2}} = \frac{a_2}{2^{3/2}} + \frac{a_2}{2^{3/2}} + a_3 + \frac{a_1}{3^{3/2}} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} - \frac{2}{9\sqrt{2}}$$

۴-۷ نشان دهيد براي يك گاز ايده آل بوزوني

$$\frac{C_p - C_v}{Nk} = \left(\frac{C_v}{3/2Nk}\right)^2 \frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

و رفتار كميت ذكر شده در دماهاي پايين زير T_c را از جنبه هاي فيزيكي بحث كنيد.

حل:

$$C_P = \frac{\partial}{\partial T}\left(U + PV\right)_p \quad , \quad U = \frac{3}{2}PV$$

$$C_P = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{3}{2}pV + PV\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{5}{2}pV\right)_p$$
(۱)

$$\frac{p}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) \Rightarrow PV = \frac{kTV}{\lambda^3} g_{3/2}(z)$$ (۲)

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) \Rightarrow \lambda^3 = \frac{V g_{3/2}(z)}{N}$$
(۳)

$$(1),(2) \Rightarrow PV = \frac{kTNV}{V g_{3/2}(z)} g_{4/2}(z) \Rightarrow PV = NkT\,\frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

از رابطه (۱) داریم:

$$C_p = \frac{5}{2}\frac{\partial}{\partial T}\left(PV\right)_p = \frac{5}{2}\frac{\partial}{\partial T}\left(NkT\,\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\right)$$

$$C_p = \frac{5}{2}Nk\left[\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} + T\left(\frac{\frac{\partial g_{5/2}(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial T}g_{3/2}(z) - \frac{\partial}{\partial z}g_{3/2}(z)\frac{\partial z}{\partial T}g_{5/2}(z)]_p}{g^2_{3/2}(z)}\right)\right]_p$$

از رابطه (۲) داریم:

$$g_{5/2}(z) = \frac{P\lambda^3}{kT} = \frac{P}{kT}\left(\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}\right)^3 \qquad , g_{5/2}(z) = \frac{h^3}{k\left(2\pi mkT\right)^{3/2}}\frac{p}{T}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}g_{5/2}(z) = -\frac{5}{2}\frac{h^3 p}{k\left(2\pi mk\right)^{3/2}}\frac{1}{T^{5/2}}\frac{1}{T} = -5/2\,g_{5/2}(z)\frac{1}{T}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}g_{5/2}(z) = -\frac{5}{2}g_{5/2}(z)\frac{1}{T}$$

$$\frac{\partial g_{5/2}(z)}{\partial z} = \frac{1}{z}g_{3/2}(z) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial T}g_{3/2}(z) = \frac{1}{z}g_{1/2}(z)$$

$$\left.\frac{\frac{\partial g_{5/2}(z)}{\partial T}}{\frac{\partial g_{5/2}(z)}{\partial T}}\right|_p = \left.\frac{\partial z}{\partial T}\right|_p = -\frac{5}{2}\frac{z}{T}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

$$C_p=\frac{5}{2}Nk\left[\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}+\frac{T\left(\frac{1}{z}g_{3/2}(z)(-\frac{5}{2}\frac{z}{T}\right)\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}g_{3/2}(z)-\frac{1}{z}g_{1/2}(z)}{\frac{\left(-\frac{5}{2}\frac{z}{T}\right)\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\ \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}g_{5/2}(z)}{g^2_{3/2}(z)}}\right]$$

$$C_p=\frac{5}{2}Nk\left[\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}-\frac{5}{2}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}+\frac{5}{2}\frac{g^2_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{g^2_{3/2}(z)}\right]$$

$$=\frac{15}{4}Nk\,\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\left[-1+\frac{5}{3}\frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\right]$$

$$C_p=\frac{15}{4}Nk\,\frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{g^2_{3/2}(z)}\left[-\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}+\frac{5}{3}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\right]$$

$$=\frac{5}{3}Nk\,\frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{g^2_{3/2}(z)}\left[-\frac{9}{4}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{1/2}(z)}+\frac{15}{4}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\right]$$

$$C_p=\frac{5}{3}Nk\,\frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{g^2_{3/2}(z)}\frac{C_V}{Nk}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{C_P}{C_V}=\frac{5}{3}\frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{g_{3/2}^2(z)}$$

$$\frac{C_p-C_V}{Nk}=\frac{C_P}{Nk}-\frac{C_P}{Nk}=\frac{5}{3}\frac{C_V}{Nk}.\frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{g^2{}_{3/2}(z)}-\frac{C_V}{Nk}$$

$$\frac{C_p-C_V}{Nk}=\frac{C_V}{Nk}=\frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\left[\frac{5}{3}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}-\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}\right]\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{4}$$

$$\frac{C_p-C_V}{Nk}=\frac{4}{9}\frac{C_V}{Nk}\frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\left[\frac{15}{4}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}-\frac{9}{4}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}\right]$$

$$\frac{C_p-C_V}{Nk}=\left(\frac{C_V}{3/2Nk}\right)^2\frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

۶-۷ نشان دهید برای یک گاز ایده آل بوزونی که در بخش ۷-۱ بررسی شد مشتق دمایی ظرفیت گرمایی ویژه C_V با زابطه زیر داده می شود.

$$\frac{1}{Nk}\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{T}\left[\dfrac{45}{8}\dfrac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}-\dfrac{9}{4}\dfrac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}-\dfrac{27}{8}\dfrac{\{g_{3/2}(z)\}^2g_{-1/2}(z)}{\{g_{1/2}(z)\}}\right] & for\,T>T_c\\[2ex] \dfrac{45}{8}\dfrac{\upsilon}{T\lambda^3}\xi\left(\dfrac{5}{2}\right) & for\,T<T_c\end{cases}$$

با استفاده از این فرمول و فرمول $(D-9)$ معادله (۷-۱-۳۸) را بررسی کنید.

حل:

$$\frac{C_V}{Nk}=\frac{15}{4}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}-\frac{9}{4}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} \qquad T>T_c$$

$$\frac{1}{Nk}\frac{\partial C_V}{\partial T}=\frac{15}{4}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\right]-\frac{9}{4}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}\right]$$

$$=\frac{15}{4}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\right]\frac{\partial z}{\partial T}-\frac{9}{4}\frac{\partial z}{\partial T}\left[\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}\right]\frac{\partial z}{\partial T}$$

$$\frac{1}{Nk}\frac{\partial C_V}{\partial T}=\frac{15}{4}\left[\frac{\frac{1}{z}g_{3/2}(z)g_{3/2}(z)-\frac{1}{z}g_{1/2}(z)g_{5/2}(z)}{g^2_{3/2}(z)}\right]\left(-\frac{3z}{2T}\right)\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}$$

$$-\frac{9}{4}\left[\frac{\frac{1}{z}g_{1/2}(z)g_{1/2}(z)-\frac{1}{z}g_{-1/2}(z)g_{3/2}(z)}{g^2_{1/2}(z)}\right]\left(-\frac{3z}{2T}\right)\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}$$

$$\frac{1}{Nk}\frac{\partial C_V}{\partial T}=\frac{15}{4}\left(\frac{-3}{2T}\right)\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}+\left(-\frac{15}{4}\right)\left(\frac{-3}{2T}\right)\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

$$+(-\frac{9}{4})(\frac{-3}{2T})\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}+\frac{9}{4}\left(\frac{-3}{2T}\right)\frac{g_{-1/2}(z)g^2_{3/2}(z)}{g^3_{1/2}(z)}$$

$$\frac{C}{Nk}\frac{\partial C_V}{\partial T}=\frac{1}{T}\begin{bmatrix} -\frac{45}{8}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}+\frac{45}{8}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}+\frac{27}{8}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} \\ \\ -\frac{27}{8}\frac{g_{-1/2}(z)g^2{}_{3/2}(z)}{g^3{}_{1/2}(z)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{Nk}\frac{\partial C_V}{\partial T}=\frac{1}{T}\left[\frac{45}{8}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}-\frac{9}{4}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}-\frac{27}{8}\frac{g^2{}_{3/2}(z)g^2{}_{-1/2}(z)}{g^3{}_{1/2}(z)}\right]$$

$$if \qquad T<T_c \quad \Rightarrow \quad \frac{C_v}{Nk}=\frac{15}{4}\zeta(\frac{5}{2})\frac{\upsilon}{\lambda^3}$$

$$\frac{1}{Nk}=\frac{\partial C_v}{\partial T}=\frac{15}{4}\zeta(\frac{5}{2})\upsilon\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \qquad , \qquad \frac{1}{\lambda^3}=\frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}$$

$$\frac{1}{\lambda^3}=\frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}T^{3/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)=\frac{\left(2\pi mkT\right)^{3/2}}{h^3}\frac{3}{2}T^{1/2}\cdot\frac{T}{T}=\frac{3}{2T}\cdot\frac{1}{\lambda^3}$$

$$\frac{1}{Nk}\frac{\partial C_v}{\partial T}=\frac{15}{4}\zeta(\frac{5}{2})\upsilon\frac{3}{2T\lambda^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda^3}=\frac{45V}{8T}\zeta(5/2)$$

۷-۱۱ یک گاز بوزونی متشکل از مولکولهایی با درجات آزادی در نظر بگیرید. فرض کنید علاوه بر حالت پایه $\varepsilon=\circ$ فقط اولین حالت ε_1 از طیف داخلی است که نیاز است آوردن در محاسبات به حساب آورده شود. دمای چگالی گاز را بصورت

تابعي از ε_1 بدست آوريد بويژه نشان دهيد كه براي $(\frac{\varepsilon_1}{kT_c^\circ}) >> 1$

$$\frac{T_c}{T_c^\circ} = 1 - \frac{2/3}{\xi(3/2)} e^{-\frac{\varepsilon_1}{KT_c^\circ}}$$

و براي $(\frac{\varepsilon_1}{kT_c^\circ}) << 1$

$$\frac{T_c}{T_c^\circ} = (\frac{1}{2})^{2/3}\left[1 + \frac{2^{4/3}}{3\xi(\frac{3}{2})}\left(\frac{\pi\varepsilon_1}{kT_c^\circ}\right)^{1/2}\right]$$

[راهنمايي: براي بدست آوردن نتايج اخير از بسط تابع $g_{3/2}(\alpha)$ براي αي كوچك كه در پيوست $(D-9)$ داده شده است استفاده كنيد.]

حل:

$$\frac{N}{V} = \sum_\varepsilon \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} - 1} + \sum_\varepsilon \frac{1}{z^{-1}e^{\beta(\varepsilon+\varepsilon_1)} - 1}$$

$$a(\varepsilon) = \frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{V} = \int_\circ^\infty \frac{a(\varepsilon)d\varepsilon}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} - 1} + \int_\circ^\infty \frac{a(\varepsilon)d\varepsilon}{z^{-1}e^{\beta(\varepsilon+\varepsilon_1)} - 1}$$

اگر $x = \beta\varepsilon$ باشد آنگاه داريم:

$$= \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3}\left\{\int_\circ^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} - 1} + \int_\circ^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{(ze^{-\beta\varepsilon_1})^{-1}e^{\beta\varepsilon} + 1}\right.$$

$$= \frac{2\pi(2m)^{3/2}\beta^{-3/2}}{h^3}\left[\int_\circ^\infty \frac{x^{1/2}dx}{z^{-1}e^x - 1} + \int_\circ^\infty \frac{x^{1/2}dx}{(ze^{-\beta\varepsilon_1})^{-1}e^x + 1}\right]$$

$$=\frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}[g_{3/2}(z)+g_{3/2}(ze^{-\beta\varepsilon_1})]$$

و بدون طيف داخلي داريم.

$$\frac{N}{V}=\frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}g_{3/2}(z)$$

از تقسيم اين دو عبارت داريم.

$$\frac{N}{V}=(\frac{T_c}{T_c^\circ})^{3/2}\frac{\zeta(\frac{3}{2})+g_{3/2}(e^{-\beta c^\circ\varepsilon_1})}{\zeta(\frac{3}{2})}\approx 1 \quad and \quad \beta_c^\circ=\frac{1}{kT_c^\circ} \quad \Rightarrow$$

$$(\frac{T_c}{T_c^\circ})=\left[1+\frac{g_{3/2}(e^{-\beta_c^\circ\varepsilon_1})}{\zeta(3/2)}\right]^{-\frac{2}{3}}$$

$$if \ \frac{\varepsilon_1}{kT_c^\circ}>>1 \qquad e^{-\beta_c^\circ\varepsilon_1}<<1 \quad \Rightarrow \quad g_{3/2}(e^{-\beta_c^\circ\varepsilon_1})\approx e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT_c^\circ}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{T_c}{T_c^\circ}=\left[1+-\frac{e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT_c^\circ}}}{\zeta(\frac{3}{2})}\right]^{-3/2} \approx 1-\frac{\frac{2}{3}}{3\zeta(3/2)}e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT_c^\circ}}$$

$$if \quad \alpha<<1 \quad g_n(\alpha)=\Gamma(1-n)\alpha^{n-1}+\sum_{i=\circ}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i\,!}\zeta(n-i)\alpha^i$$

از پيوست D و رابطه $\alpha=-\ln z$ داريم.

$$g_{3/2}(e^{-\beta_c^\circ \varepsilon_1}) \approx \Gamma\left(1-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon_1}{kT_c^\circ}\right)^{1/2} = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon_1}{kT_C^\circ}\right)^{1/2} = 2\left(\frac{\varepsilon_1 \pi}{kT_c^\circ}\right)^{1/2}$$

$$\frac{T_c}{T_c^\circ} = \left[1-\frac{2\left(\frac{\varepsilon_1 \pi}{kT_c^\circ}\right)}{\zeta(3/2)}\right]^{-2/3} \approx 1+\frac{4\left(\frac{\pi\varepsilon_1}{kT_c^\circ}\right)}{3\zeta(3/2)}$$

۱۴-۷ الف) تابع پارش بزرگ($grand$) يك گاز ايده آل بوزوني دو بعدي را بدست آوريد و يك عبارت براي تعداد ذرات برواحد سطح سيستم بصورت تابعي از پارامترهاي Z و T در حالت تعادل بدست آوريد. نشان دهيد كه اين سيستم پديدة چگالش بوزاينشتين را نشان نمي دهد.

ب) براي توضيح اين نتايج، يك بررسي مشابه از يك گار بوزوني n بعدي كه طيف انرژي ذرات منفرد آن با $\varepsilon \propto p^s$ كه s عددي مثبت مي باشد داده مي شود انجام دهيد. در بازة پديدة چگالش بوزاينشتين اين سيستم مخصوصاً وابستگي آن به اعداد n و s بحث كنيد. خصوصيات لازم رفتار ترموديناميكي اين سيستم را بررسي كنيد و بطور كاملاً كلي نشان دهيد كه

$$p=\frac{s}{n}\frac{U}{\mathrm{V}} \quad , \quad C_{\mathrm{v}}(T\to\infty)=\frac{n}{s}Nk$$

پس اگر در سيستم پديدة چگالش اتفاق بيفتد آنگاه:

$$(C_{\mathrm{v}})_{T=T_c^-} = \frac{n}{c}\left(\frac{n}{s}+1\right)\frac{\xi(\frac{n}{s}+1)}{\xi(\frac{n}{s})}Nk$$

$$(C_{\mathrm{v}})_{T=T_{c^-}}-(C_{\mathrm{v}})_{T=T_{c^+}}=(\frac{n}{c})^2\frac{\xi(\frac{n}{s})}{\xi(\frac{n}{s}-1)}Nk$$

و

$$(\frac{C_p}{C_{\mathrm{v}}})_{T_{c^+}}=\frac{n+s}{n}\xi(\frac{n}{s}+1)\xi(\frac{n}{s}-1)/\xi^2(\frac{n}{s})$$

و بنابراین

$$(\frac{\partial C_{\mathrm{v}}}{\partial T})_{T_{c^-}}=(\frac{n}{s})^2(\frac{n}{s}+1)\frac{\xi(\frac{n}{s}+1)}{\xi(\frac{n}{s})}\frac{Nk}{T_c}$$

و

$$(\frac{\partial C_{\mathrm{v}}}{\partial T})_{T_{c^-}}-(\frac{\partial C_{\mathrm{v}}}{\partial T})_{T_{c^+}}=(\frac{n}{s})^2\frac{Nk}{T_c}\left[\frac{\xi(\frac{n}{s})}{\xi(\frac{n}{s}-1)}+\frac{n}{s}\;\frac{\xi^2(\frac{n}{s})\xi(\frac{n}{s}-2)}{\xi^2(\frac{n}{s}-1)}\right]$$

ج) با کمك این فرمول ها مورد گاز بوزوني فرين نسبيتي $(\varepsilon=pc)$ را مورد بررسي قرار داده و نتايج را با تابش جسم سياه مقايسه کنيد.

حل:

$$\ln D=-\sum_{\varepsilon}\ln(1-ze^{-\beta\varepsilon})\;\;\Rightarrow\;\;\ln D=-\int_{\circ}^{\infty}a(\varepsilon)\ln(1-ze^{-\beta\varepsilon})d\varepsilon$$

$$\frac{1}{h^2}\iint d^2p\,d^2q=\frac{1}{h^2}(A)\pi p^2=\frac{\pi A}{h^2}(2m\varepsilon)\;\;\Rightarrow$$

$$a(\varepsilon)=\frac{2\pi mA}{h^2}$$

$$\ln D=-\int_{\circ}^{\infty}\frac{2mA\pi}{h^2}\ln(1-ze^{-\beta\varepsilon})d\varepsilon=-\frac{2\pi mA}{h^2}$$

$$\left\{\varepsilon\ln(1-ze^{-\beta\varepsilon})\Big|_{\circ}^{\infty}-\int_{\circ}^{\infty}\frac{\varepsilon ze^{-\beta\varepsilon}\beta d\varepsilon}{1-ze^{-\beta\varepsilon}}\right\}$$

كه در اين روابط A مساحت سيستم مي باشد. اگر $x=\beta\varepsilon$ باشد آنگاه داريم:

$$\ln D=\frac{2\pi mAkT}{h^2}\int_{\circ}^{\infty}\frac{xdx}{z^{-1}e^{x}-1}=\frac{2\pi mkT}{h^2}\Gamma(2)g_2(z)$$

$$=\frac{2\pi mAkT}{h^2}g_2(z)\qquad \Gamma(2)=1!=1$$

$$\frac{N}{A}=\frac{2\pi m}{A}\int_{\circ}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon}-1}=\frac{2\pi mkT}{h^2}\int_{\circ}^{\infty}\frac{dx}{z^{-1}e^{x}-1}$$

$$\frac{N}{A}=\frac{2\pi mkT}{h^2}g_1(z)$$

$$g_1(z)=-\ln(1-z)\to g(1)=\infty\quad\Rightarrow\quad\frac{N}{A}\to\infty$$

بنابراين چگالش بوز اينشتين اتفاق نمي افتد.

ب)

$\varepsilon=Ap^s$

$$\sum(\varepsilon)=\frac{1}{h^2}\int\int d^n p\,d^n q=\frac{V_n}{h^n}\left(\frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}\right)\left(\frac{\varepsilon}{A}\right)^{n/s}\qquad \circ<p<\left(\varepsilon/A\right)^{1/2}$$

$$a(\varepsilon)=\frac{d\sum(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\frac{n}{s}V_n \quad \frac{\pi^{n/2}}{h^n(\frac{n}{2})!A^{n/2}}\varepsilon^{n/s-1}$$

$$\alpha=\frac{\pi^{n/2}}{h^n(\frac{n}{2})!A^{n/2}}$$

$$\frac{PV}{kT}=\ln D=-\int\frac{n}{s}V_n\,\alpha\varepsilon^{n/s-1}\ln(1-ze^{-\beta\varepsilon})d\varepsilon-\ln(1-z)$$

$$=-\frac{n}{s}V_n\,\alpha\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon^{n/s}}{(n/s)}\ln(1-ze^{-\beta\varepsilon})-\frac{1}{(n/s)}\int_\circ^\infty\frac{\varepsilon^{n/s}\beta z\,e^{-\beta\varepsilon}d\varepsilon}{1-ze^{-\beta\varepsilon}}\\ \\ -\ln(1-z)\end{bmatrix}$$

$$\ln D=V_n\,\alpha\beta^{-n/s}\int_\circ^\infty\frac{x^{n/s}dx}{z^{-1}e^{-\beta\varepsilon}-1}=V_n\,\alpha\beta^{n/s}\,\Gamma(\frac{n}{s}+1)\,g_{n/s+1}(z)-\ln(1-z)$$
(I)

$$\frac{N-N_\circ}{V_n}=\frac{N}{s}\alpha\int_\circ^\infty\frac{\varepsilon^{n/s-1}d\varepsilon}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon}-1}=\frac{n}{s}\beta^{-n/s}\alpha\int_\circ^\infty\frac{x^{n/s-1}dx}{z^{-1}e^{x}-1}$$

$$=\frac{n}{s}\alpha\beta^{-n/s}\,\Gamma(\frac{n}{s})\,g_{n/s}(z)=\alpha\beta^{-n/s}\,\Gamma(\frac{n}{s}+1)g_{n/s}(z) \qquad \text{(II)}$$

$$U = -\left[\frac{\partial \ln D}{\partial \beta}\right]_{z,V} = -\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\alpha V_n \beta^{-n/s}\Gamma(\frac{n}{s}+1)g_{n/s+1}(z)\right]_{z,V}$$

$$U = \alpha V_n \frac{n}{s}\beta^{-(\frac{n}{s}+1)}\Gamma(\frac{n}{s}+1)g_{n/s+1}(z)$$

$$P = \alpha\beta^{-(n/s+1)}\Gamma(n/s+1)g_{n/s+1}(z) \quad \Rightarrow$$

$$U = \frac{n}{S}V_n p$$

$$P = \frac{s}{n}\frac{V}{V_n}$$

از روابط (I) و (II) داريم.

$$\frac{P}{kT} = \frac{N}{V}\frac{g_{n/s+1}(z)}{g_{n/s}(z)}$$

$$U = \frac{n}{s}NkT\,\frac{g_{n/s+1}(z)}{g_{n/s}(z)}$$

براي دماهاي بالا داريم.

$$U = \frac{n}{s}NkT$$

وقتي كه $T = T_c$

$$U = \alpha V_n \frac{n}{s}(kT)^{(n/s+1)}\Gamma(\frac{n}{2}+1)\zeta(\frac{n}{s}+1)$$

$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=\left[\alpha V_n\beta^{-n/s}\,\Gamma(n/s+1)\right]\frac{n}{s}\left(n/s+1\right)K\zeta(n/s+1)$$

$$=\left(\frac{n}{s}\right)\left(\frac{n}{s}+1\right)Nk\,\frac{\zeta(\frac{n}{s}+1)}{\zeta(\frac{n}{s})}$$

$$U=\frac{n}{s}\left[\alpha V_n\beta^{-n/s}\,\Gamma(n/s+1)\right]kTg_{n/s+1}(z)=\frac{n}{s}NkT\,\frac{g_{n/s+1}(z)}{g_{n/s}(z)}$$

$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=\frac{n}{s}Nk\left[\frac{g_{n/s+1}{}^{(z)}}{g_{n/s}(z)}+T\,\frac{\partial z}{\partial T}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g_{n/s+1}(z)}{g_{n/s}(z)}\right)\right]$$

از رابطه (II) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[T^{n/s}g_{n/s}(z)\right]=\circ\;\Rightarrow\;\frac{n}{s}\frac{T^{n/s}}{T}g_{n/s}(z)+T^{n/s}\frac{\partial}{\partial T}\left[g_{n/s}(z)\right]=\circ$$

$$\frac{N}{s}\frac{g_{n/s}(z)}{T}+\frac{\partial z}{\partial T}\cdot\frac{\partial}{\partial T}\left[g_{n/s}(z)\right]=\circ$$

$$\frac{\partial z}{\partial T}=-\frac{n}{s}\frac{z}{T}\frac{g_{n/s}{}^{(z)}}{g_{n/s-1}{}^{(z)}}$$

$$C_V = \frac{n}{s} Nk\left[\frac{g_{n/s}^{(z)}+1}{g_{n/s}^{(z)}} - \frac{n}{s} z \frac{g_{n/s}^{(z)}}{g_{n/s-1}^{(z)}} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \frac{g_{n/s-1}^{(z)} g_{n/s+1}^{(z)}}{[g_{n/s}^{(z)}]^2} \right. \right]$$

$$C_V = \frac{n}{s} Nn\left[\frac{g_{n/s+1}^{(z)}}{g_{n/s}^{(z)}} - \frac{n}{s} \frac{g_{n/s}^{(z)}}{g_{n/s-1}^{(z)}} + \frac{n}{s} \frac{g_{n/s+1}(z)}{g_{n/s}(z)} \right] \Rightarrow$$

$$C_V\Big|_{T^+} = \frac{n}{s} Nk\left[(n/s+1)\frac{\zeta(n/s+1)}{\zeta(n/s)} - n/s\, \frac{\zeta(n/s)}{\zeta(n/s-1)} \right]$$

$$C_V\Big|_{T^+} - C_V\Big|_{T^-} = \left(\frac{n}{s}\right)^2 Nk\, \frac{\zeta(n/s)}{\zeta(n/s-1)}$$

۷-۱۶ نشان دهید که میانگین انرژي به ازاي يك فوتون در يك كاواك تابش جسم سياه خيلي نزديك به مقدار $2/7k$ مي باشد.

حل:

چگالی انرژی برحسب فرکانس

$$U(\omega)d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

انرژی بر واحد حجم برابر است:

$$\frac{U}{V} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_\circ^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

$$x = \beta\hbar\omega \Rightarrow dx = \beta\hbar d\omega \rightarrow d\omega = \frac{dx}{\beta\hbar} = \frac{kT}{\hbar} dx$$

$$\omega = \frac{x}{\beta\hbar}$$

$$U=\frac{\hbar V}{\pi^2c^3}\int\frac{\omega^3d\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}=\frac{\hbar V}{\pi^2c^3}\int\frac{(x/\beta\hbar)^3\frac{dx}{\beta\hbar}}{e^x-1}$$

$$=\frac{\hbar V}{\pi^2c^3}\left(\frac{1}{\beta\hbar}\right)^4\int\frac{x^3dx}{e^x-1}$$

$$U=\frac{\hbar V\,(kT)^4}{\pi^2c^3\hbar^4}\int\frac{x^3dx}{e^x-1}=\frac{V\,(kT)^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\int\frac{x^3dx}{e^x-1}$$

از طرفی مي دانیم

$$\int\frac{x^3dx}{e^x-1}=6/494$$

$$\int\frac{x^3dx}{e^x-1}=2/44$$

چگالی ذرات

$$g(\omega)d\omega=\frac{V\quad\omega^2d\omega}{\pi^2c^3}$$

$$d\bar{n}=g(\omega)d\omega<n_\varepsilon>$$

$$<n_\varepsilon>=\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

$$d\bar{n}=\frac{V\quad\omega^2\,d\omega}{\pi^2c^3(e^{\beta\hbar\omega}-1)}\quad\Rightarrow\quad\bar{N}=\frac{V}{\pi^2c^3}\int\frac{\omega^2d\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

$$x=\beta\hbar\omega \Rightarrow dx=\beta\hbar d\omega \Rightarrow d\omega=\frac{dx}{\beta\hbar} \quad \omega^2=\left(\frac{x}{\beta\hbar}\right)^2$$

$$\bar{N}=\frac{V}{\pi^2c^3}\int\frac{(x/\beta\hbar)^2\frac{dx}{\beta\hbar}}{e^x-1}=\frac{V(kT)^3}{\pi^2c^3\hbar^3}\int\frac{x^2dx}{e^x-1}$$

$$\frac{V}{\bar{N}}=\frac{\frac{V(kT)^4}{\pi^2c^3h^3}}{\frac{V(kT)^3}{\pi^2c^3h^3}}\times\frac{\int\frac{x^3dx}{e^x-1}}{\int\frac{x^2dx}{e^x-1}}=kT\,\frac{6/494}{2/404}=2/7kT$$

۱۸-۷ خورشید را به عنوان یک جسم سیاه در دمای $5800k^\circ$ در نظر بگیرید. قطر آن در حدود $1/4\times10^9m$ و فاصله آن تا زمین در حدود $1/5\times10^{11}m$ می باشد.

الف - شدت تابش کل $(\frac{W}{m^2})$ نور خورشید بر سطح زمین را محاسبه کنید.

ب - چه فشاری باید روی یک سطح جذب کنندة کامل که بصورت عمود در مقابل اشعه خورشید قرار گرفته است اعمال شود.

ج - اگر سطح صاف یک ماهواره که مقابل خورشید است یک جاذب و تابندة ایده آل باشد. دمایی تعادلی که سرانجام بدست می آید چقدر است؟

حل:

$$T=5800K^\circ \quad D=1/4\times10^9\,m \quad R=1/5\times10^{11}m$$

$$\frac{1}{4}\frac{U}{V}c=\sigma T^4$$

آهنگ خالص شارش تابش بر واحد سطح خورشید

$$\sigma=5067\circ\times10^{-8}W/m^2k^2 \Rightarrow \sigma T^4=5/670\times10^{-8}(5800)^4=6/4\times10^7\frac{W}{m^2}$$

بنابراین آهنگ شارش تابش از سطح خورشید برابر است با
$\left(4\pi r^2\right)\sigma T^4$

که r شعاع خورشید مي باشد.
آهنگ شارش تابش خالصي که به واحد سطح زمین مي رسد
برابر است با:

$$\frac{\sigma T^4\left(4\pi r^2\right)}{4\pi R^2}=\sigma T^4\left(\frac{r}{R}\right)^2=6/4\times1\circ^7\times\frac{\circ/49\times1\circ^{18}}{2/25\times1\circ^{22}}=14\circ\circ\ W/m^2$$

ب - از رابطه (الف) داریم

$$S_\sigma=14\circ\circ\frac{W}{m^2}\ ,\ S_\sigma=\frac{Power}{Area}=\frac{Fc}{A}$$

که c سرعت نور و $\frac{F}{A}$ فشار مي باشد. بنابراین:

$$s_\sigma=Pc$$

$$P=\frac{S_\sigma}{c}=\frac{14\circ\circ}{3\times1\circ^8}=4/67\times1\circ^{-6}\frac{N}{m^2}\ (pascal)$$

وقتي به تعادل گرمایي مي رسیم که جذب و تابش ماهواره
برابر شوند.

$$\sigma T_e{}^4=S_a\ \Rightarrow\ T_e{}^4=\frac{14\circ\circ}{5\circ67\times1\circ^{-7}}\rightarrow T_e\approx396/4\,K$$

۷- ۱۹ در شکل (۷-۱۴) تابع $C_v(T)$ برحسب T براي یك جامد رسم شده است. مقدار حدي $C_v(\infty)$ یك نتیجة کلاسیکي است که بوسیله دولان وپتي داده شده است.
نشان دهید که سطح هاشور خورده در شکل یعني

$$\int_\circ^\infty\left\{C_v(\infty)-C_v(T)dT\right\}$$

بصورت دقیق برابر با انرژي نقطه صفر جامد مي باشد. این نتیجه را بطور فیزیکي تفسیر کنید.

حل:

مي دانيم كه:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad , \quad U = \int_{\circ}^{\omega_D} \varepsilon(\omega,T)\, g(\omega) d\omega$$

كه U انرژي داخلي جامي مي باشد.

$$\Rightarrow \quad C_V = \int_{\circ}^{\infty} \frac{\partial \varepsilon(\omega,T)}{\partial T}\, g(\omega,V,N) d\omega \qquad (۱)$$

ε انرژی متوسط نوسانگر هارمونيك با فركانس زاويه ای ω است.

$$\varepsilon(\omega,T) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

(۲)

اگر $T \to \infty$ بنابراين $\varepsilon(\omega,T) kT$ و اين حد كلاسيك مي باشد.

$$C_{\infty} = \int_{\circ}^{\infty} \frac{\partial}{\partial T}(kT)\, g(\omega,V,N) d\omega$$

(۳)

اين معادل است با حاصل ضرب k ضرب درتعداد درجات آزادی همانطوری که از $g(\omega,N,V)$ آشكار است.

$$\int_{\circ}^{\infty} g(\omega,V,N)\, d\omega$$

(۴)

درجات آزادی بلور
مساحت ها شور زده در شکل از ۱ و ۳ بصورت زير محاسبه می شود.

$$\int_{\circ}^{\infty} \left[C_V(V,T,N) - C_V(V,T,N) \right] dT$$

$$= \int_{\circ}^{\infty} \int_{\circ}^{\infty} [\frac{\partial}{\partial T} \left\{ kT - \varepsilon(\omega,T) \right\} g(\omega,V,N) dT \;\; d\omega$$

$$=\int_{\circ}^{\infty}\left[kT-\varepsilon(\omega,T)\right]_{T=\circ}^{T=\infty}g(\omega,V,N)d\omega=\int_{\circ}^{\infty}\varepsilon(\omega,\circ)g(\omega,V,N)d\omega \quad (5)$$

از رابطه (۲) داریم $\varepsilon(\omega,T)=1/2\hbar\omega$ که انرژی نقطه صفر نوسانگر ها رمونیک است و رابطه (۵) معادل است با انرژی نقطه صفر $U(V,\circ,N)$ از جامد و انرژی داخلی جامد یعنی $U(V,T,N)$ بصورت رابطه (۴) بصورت مسله حل شده در کتاب آمده است.

۷-۲۰ نشان دهید که انرژي کل نقطه صفر یك جامد دباي برابر با $\frac{9}{8}Nk\Theta_D$ مي باشد توجه کنید که مفهوم این عبارت این است که براي هر مود ارتعاشي از جامد میانگین انرژي نقطه صفر $\frac{3}{8}k\Theta_D$ مي باشد یعني:

$$\hbar\varpi=\frac{3}{4}k\Theta_D$$

حل:

$$E_{\circ}(\omega)=\frac{1}{2}\hbar\omega \quad \Rightarrow \quad E=\int_{\circ}^{\omega_D}\frac{1}{2}\hbar\omega g(\omega)d\omega$$

$$g(\omega)=\begin{cases}\dfrac{9N}{\omega_D^3}\omega^2 & for\ \omega\le\omega_D\\ \circ & \omega>\omega_D\end{cases}$$

$$E=\frac{1}{2\hbar}\int_{\circ}^{\omega_D}\omega\frac{9N}{\omega_D^3}\omega^2 d\omega=\frac{9}{2}\frac{N\hbar}{\omega_D^3}\left(\frac{1}{9}\omega^4\right)_{\circ}^{\omega_D}=\frac{9}{8}N\hbar\omega_D$$

$$\omega_D=\frac{k\Theta_D}{\hbar} \quad \Rightarrow \quad E=\frac{9}{8}Nk\Theta_D$$

مسائل اضافي ويرايش قديم

-۱

تابع پارش كانوني گاز فوتوني را بدست آوريد و آن را با تابع پارش بزرگ گاز كه با معادله (۷-۲-۱۵) داده شده است مقايسه كنيد نتايج را از لحاظ فيزيكي تفسير كنيد.

حل:

$$\ln D=\frac{PV}{kT}=-\sum_{\varepsilon}\ln(1-e^{-\beta\varepsilon})=-\sum_{\varepsilon}\ln(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}})$$

تابع پارش براي يك نوترون

$$Q_1=\sum_{n=\circ}^{\infty}e^{-\beta n_1\hbar\omega_1}\qquad n=\circ,1,2,\dots\dots$$

براي تابع پارش كل سيستم داريم

$$Q=Q_1Q_2Q_3\dots\dots=\sum_{n_1,n_2,\dots\dots}e^{-\beta\hbar\omega(n_1+n_2+\dots)}$$

$$=\sum_{n_1=\circ}^{\infty}e^{-\beta n_1\hbar\omega_1}\sum_{n=\circ}^{\infty}e^{-\beta n_1\hbar\omega_2}\dots=\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_1}}\right)\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_2}}\right)\dots\dots\Rightarrow$$

$$Q=\prod_i\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_i}}\right)$$

$$\ln Q=\ln\left[\prod_i\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_i}}\right)\right]=\sum_i\ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_i}}\right)$$

$$=-\sum_i\ln(1-e^{-\beta\hbar w_i})\quad,\quad E=\hbar\omega\quad,\quad\beta=\frac{1}{kT}$$

$$\ln Q=-\sum_{\varepsilon}\ln(1-e^{-E/kT})$$

۲- تابع پارش (کانونی) یک جامد دبای را بنویسید. و خصوصیات ترمودینامیکی گوناگون این سیستم را بدست آورید.

حل:

تابع پارش برای یک نوسانگر هماهنگ

$$Q_i=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_i}{kT}\right)}=\frac{\exp(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_i)}{1-\exp(-\beta\hbar\omega_i)}$$

$$Q_i=\frac{1}{2\sinh(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_i)}$$

اگر جامد معادل با N نوسانگر هماهنگ مستقل در نظر گرفته شود آنگاه داریم:

$$Q_N=\prod_{i=1}^{N}Q_i=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{2\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2}\right)}$$

$$A=-kT\ln Q_N=-kT\sum_i\ln\left[2\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega_i}{2}\right)\right]$$

$$A=kT\int_0^{\infty}\ln\left[2\sinh(\frac{\beta\hbar\omega}{2})\right]g(\omega)d\omega$$

$$U=-T^2\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{A}{T}\right)\right]_{N,V}=\int_0^{\omega_D}\varepsilon(\omega,T)g(\omega)d\omega$$

$$\varepsilon(\omega,T)=\frac{\hbar\omega}{2}\cot gh(\frac{\beta\hbar\omega}{2})=\frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

$$U=\int_{\circ}^{\omega_D}\frac{9N}{\omega_D^3}\frac{\hbar\omega^3}{2}d\omega+\int_{\circ}^{\omega_D}\frac{9N}{\omega_D^3}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}d\omega$$

$$=\frac{9}{8}N\hbar\omega_D+\frac{9N\hbar}{\omega_D^3}\int_{\circ}^{\omega_D}\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega-1}}d\omega$$

$$C_v=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N}=\int_{\circ}^{\omega_D}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega}-1)^2}g(\omega)d\omega=3NkD(x_\circ)$$

$$D(x_\circ)=\frac{3}{x_\circ^3}\int_{\circ}^{x_\circ}\frac{x^4e^x dx}{(e^x-1)^2}=-\frac{3x_\circ}{e^{x_\circ}-1}+\frac{12}{x^3}\int_{\circ}^{x_\circ}\frac{x^3dx}{e^x-1}$$

$$x_\circ=\frac{\hbar\omega_D}{kT}$$

در دماي پايين

$$C_v=\frac{12\pi^6}{5}Nk\left(\frac{T}{\Theta_\circ}\right)^3=\frac{\Theta_\circ}{T}$$

فصل 8

۸–۲

حل:

$$\frac{N}{V}=\frac{g}{\lambda^3}f_{\frac{3}{2}}(z)$$

$$f_n(z)=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{z^l}{l^n}=z-\frac{z^2}{2^n}+\frac{z^3}{3^n}+\cdots$$

$$\frac{N}{V}=g\,\frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3}f_{\frac{3}{2}}(z)$$

$$T=T_\circ \Rightarrow z=1$$

$$\frac{N}{V}=\frac{g\,(2\pi mk)^{\frac{3}{2}}}{h^3}T_\circ^{\frac{3}{2}}f_{\frac{3}{2}}(1)$$

$$T_\circ^{\frac{3}{2}}=\frac{Nh^3}{gV(2\pi mk)^{\frac{3}{2}}f_{\frac{3}{2}}(1)}$$

$$N=\int_\circ^{\varepsilon_F}a(\varepsilon)d\varepsilon \quad\Rightarrow\quad N=\frac{4\pi gV}{3h^3}p_F^3 \quad\Rightarrow$$

$$N=\frac{4\pi gV}{3h^3}(2m\varepsilon_F)^{\frac{3}{2}}\varepsilon_F=kT_F$$

$$N=\frac{4\pi gV}{3h^3}(2mk)^{\frac{3}{2}}T_F^{\frac{3}{2}}$$

$$T_\circ^{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi gV}{3h^3}(2mk)^{\frac{3}{2}}\frac{h^3}{gV(2\pi mk)^{\frac{3}{2}}f_{\frac{3}{2}}(1)}T_F^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{T_\circ}{T_F}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{1}{f_{\frac{3}{2}}(1)}\quad\Rightarrow\quad T_\circ=\left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}f_{\frac{3}{2}}(1)}\right)^{\frac{3}{2}}T_F$$

۷-۸

حل:

تعداد ذراتی که در واحد حجم دارای سرعتی بین $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}+d\mathbf{u}$ هستند عبارتند از:

$$\eta f(\mathbf{u})d\mathbf{u}$$

$$\eta=\frac{N}{V}=\frac{1}{V}\langle n_s\rangle\frac{gVd^3p}{h^3}=\frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon}+1}\frac{g\,d^3p}{h^3}$$

$$z=e^{\mu/kT}$$

$$\eta = \frac{N}{V} = \frac{g}{h^3} \frac{d^3p}{e^{(E-\mu)/kT}+1}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow dp = \frac{m\,dE}{\sqrt{2mE}}$$

$$\int d^3p = \int 4\pi p^2 dp = 4\pi \int 2mE\,\frac{m\,dE}{\sqrt{2mE}} = 2\pi \int 2mE\,\frac{2m\,dE}{\sqrt{2mE}}$$

$$= 2\pi (2m^3)^{3/2} \int E^{1/2} dE$$

بنابراين براي تابع توزيع رابطه زير را بدست مي آوريم.

$$\int \frac{g}{h^3} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon}+1} 2\pi (2m)^{3/2} E^{1/2} dE$$

برای محاسبه $\langle u \rangle$ از تساوی زیر استفاده می کنیم.

$$E = \frac{1}{2} m V^2 + U = \left(\frac{2E}{m} \right)^{1/2}$$

$$\langle U \rangle = \left\langle \left(\frac{2E}{m} \right)^{1/2} \right\rangle = (2/m)^{1/2} \left\langle E^{1/2} \right\rangle$$

$$\left\langle E^{1/2} \right\rangle = \frac{2\pi (2m)^{3/2} g}{h^3} \int_{\circ}^{\infty} \frac{E^{1/2} E^{1/2} dE}{e^{(E-\mu)/kT}+1} = \frac{2\pi (2m)^{3/2} g}{h^3}$$

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{E\,dE}{e^{(E-\mu)/kT}+1} = \frac{2\pi (2m)^{3/2} g}{h^3} \int_{\circ}^{\infty} \frac{E\,dE}{e^{(E-\mu)/kT}+1}$$

$$x=\beta E \quad \Rightarrow \quad E=\frac{x}{\beta} \quad \Rightarrow \quad dE=\frac{dx}{\beta}$$

$$\left\langle E^{1/2}\right\rangle=\frac{2\pi(2m)^{3/2}g}{h^3}\int_\circ^\infty \frac{x/\beta \;\frac{dE}{\beta}}{z^{-1}e^x+1}=\frac{2\pi(2m)^{3/2}g}{h^3\beta^2}\int_\circ^\infty \frac{x\,dx}{e^x z^{-1}+1}$$

$$\left\langle E^{1/2}\right\rangle=\frac{2\pi\,(2m)^{3/2}g}{\beta^2 h^3}\,\Gamma(2)\,f_2(z)$$

$$\langle u\rangle=(2/m)^{1/2}\left\langle E^{1/2}\right\rangle=\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2}\frac{2\pi\,(2m)^{3/2}g}{\beta^2 h^3}\,\Gamma(2)f_2(z)=\frac{8\pi m g}{\beta^2 h^3}\,\Gamma(2)f_2(z)$$

$$\left\langle \frac{1}{u}\right\rangle=\left\langle \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m}}}\right\rangle=\sqrt{\frac{m}{2}}\left\langle E^{-\frac{1}{2}}\right\rangle$$

$$\left\langle E^{\frac{-1}{2}}\right\rangle=\frac{2\pi(2m)^{3/2}g}{h^3}\int_\circ^\infty \frac{E^{\frac{1}{2}}E^{-\frac{1}{2}}dE}{z^{-1}e^{\beta E}+1}=\frac{2\pi(2m)^{3/2}g}{h^3}\int_\circ^\infty \frac{dE}{z^{-1}e^{\beta E}+1}$$

$$x=\beta E \quad \Rightarrow \quad dx=\beta dE$$

$$\left\langle E^{-\frac{1}{2}}\right\rangle=\frac{2\pi(2m)^{3/2}g}{h^3}\int_\circ^\infty \frac{dx/\beta}{z^{-1}e^x+1}=\frac{2\pi(2m)^{3/2}g}{\beta h^3}\int_\circ^\infty \frac{dx}{z^{-1}e^x+1}$$

$$\left\langle E^{-\frac{1}{2}}\right\rangle=\frac{2\pi\,(2m)^{3/2}g}{h^3}\,\Gamma(1)f_1(z)$$

$$\left\langle \frac{1}{u} \right\rangle = (\frac{m}{2})^{1/2} \left\langle E^{-\frac{1}{2}} \right\rangle = (\frac{m}{2})^{1/2} \frac{2\pi(2m)^{3/2}g}{\beta h^3} \Gamma(1) f_1(z) = \frac{4\pi m^2 g}{\beta h^3} \Gamma(1) f_1(z)$$

$$\begin{cases} f_1(z) = \dfrac{(\ln z)^1}{\Gamma(2)} [1 + \cdots] \\ \\ f_2(z) = \dfrac{\ln(z)}{\Gamma(3)} [1 + \cdots] \end{cases}$$

$$\langle u \rangle \left\langle \frac{1}{u} \right\rangle = \frac{32\pi^2 g^2 m^3}{\beta^3 h^6} \Gamma(1)\, \Gamma(2)$$

$$\ln(z) = \varepsilon_F \beta \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon\beta} \right)^2 \right]$$

$$\langle u \rangle \left\langle \frac{1}{u} \right\rangle = \frac{32 g^2 \pi^2 m^3}{\beta^3 h^6} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(2)} \varepsilon_F^2 \beta^2 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} (\frac{kT}{\varepsilon_F})^2 \right]^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{1}{\beta^2 \varepsilon_F^2} \\ \\ \left[1 - \dfrac{\pi^2}{12} (\dfrac{kT}{\varepsilon_F})^2 \right]^{-2} \end{bmatrix}$$

$$=32\frac{g^2\pi^2m^3\varepsilon_F^2}{h^6}\frac{\Gamma(1)}{z\,\Gamma(3)}\times\left[1-\frac{\pi^2}{12}(\frac{kT}{\varepsilon_F})^2\right]^3$$

$$\left\{1+\frac{\pi^2}{3\varepsilon_F^2\beta^2}\left[1-\frac{\pi^2}{12}(\frac{kT}{\varepsilon_F})^2\right]^{-2}\right\}$$

اگر از توانهای بالاتر از $(kT)^2$ صرفنظر کنیم داریم:

$$\langle u\rangle\left\langle\frac{1}{u}\right\rangle=\frac{16\pi^2m^2g^2\varepsilon_F^2}{h^6}\left(1+\frac{\pi^2(kT)^2}{12\varepsilon_F}\right)$$

$$\varepsilon_F^3=\left(\frac{h^2}{2m}(\frac{3N}{4\pi V})^{2/3}\right)^3=\frac{h^6}{8m^3}\left(\frac{3N}{\varepsilon\pi V}\right)^2$$

$$\langle u\rangle\left\langle\frac{1}{u}\right\rangle=\frac{16\pi^2m^2g^2h^6}{h^6 8m^3}\left(\frac{3N}{\varepsilon\pi V}\right)^2\left[1+\frac{\pi^2}{12\varepsilon_F^2}(kT)^2\right]$$

$$=\frac{9}{8}g^2\frac{mN^2}{V^2}\left(1+\frac{\pi^2}{12\varepsilon_F^2}(kT)^2\right)$$

براي حالت نسبيتي $u=c$ بنابراین:

$$\left\langle\frac{1}{c}\right\rangle\langle c\rangle=1\Rightarrow\ \langle u\rangle\left\langle\frac{1}{u}\right\rangle\geq 1$$

۸-۴

حل:

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_{N,T} = -\frac{1}{V}\left[\frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{N,T}}\right]$$

در دماهای پایین

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{5}\varepsilon_F\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2+\ldots\right] \Rightarrow U = \frac{3}{5}N\,\varepsilon_F\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)+\ldots\right]$$

$$\frac{2}{3}\frac{U}{V} = \frac{2}{5}\frac{N}{V}\varepsilon_F\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2+\ldots\right] = \frac{2}{5}\frac{N}{V}\varepsilon_F\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{KT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$$

$$\frac{2}{3}\frac{U}{V} = P = \frac{2}{5}\frac{N}{V}\varepsilon_F + \frac{2}{5}\frac{N}{V}\varepsilon_F\left(\frac{KT}{\varepsilon_F}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\varepsilon_F = \left(\frac{3N}{4\pi g v}\right)^{2/3}\frac{h^2}{2m} \Rightarrow \varepsilon_F = \left(\frac{3N}{4\pi g}\right)^{2/3}\frac{h^2}{2m}V^{-2/3}$$

$$P = \frac{2}{5}N\left(\frac{3N}{4\pi g}\right)^{2/3}\frac{h^2}{2m}V^{-5/3} + \frac{2}{5}N\,\frac{5\pi^2}{12}(kT)^2\left(\frac{3N}{4\pi g}\right)^{-2/3}\frac{2m}{h^2}V^{-1/3}$$

$$P = AV^{-5/3} + BV^{-1/3}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{N,T} = -\frac{5}{3}AV^{-8/3} - \frac{1}{3}BV^{-4/3}$$

$$-V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{N,V} = \frac{5}{3}AV^{-5/3} + \frac{1}{3}BV^{-1/3}$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left[\frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{N,T}}\right] = \left[\frac{5}{3}AV^{-5/3} + \frac{B}{3}V^{-1/3}\right]^{-1}$$

۷-۸

حل:

می دانیم که

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{\lambda^3} f_{\frac{3}{2}}(z)$$

$$\lambda = \frac{h}{(2\pi mkT)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f_n(\xi) = \frac{\xi^n}{\Gamma(n+1)}\left(1 + n(n-1)\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{\xi^2} + n(n-1)(n-2)(n-3)\frac{7\pi^4}{360}\frac{1}{\xi^4} + \cdots\right)$$

$$\xi = \ln z \quad , \quad z << 1$$

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{\lambda^3}\frac{(\ln z)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}\left(1 + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{(\ln z)^2}\right.$$

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{3}{2}-3\right)\frac{7\pi^4}{360}\frac{1}{(\ln z)^4}+\cdots\right)$$

$$\frac{N}{V}=g\,\frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3}\frac{(\ln z)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left(1+\frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}+\frac{7\pi^4}{640}(\ln z)^{-4}+\cdots\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\times1}{2^2}\sqrt{\pi}=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$ −۶)

(۸

$$(kT\ \ln z)^{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{N}{V}}{\frac{4\pi g}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}+\frac{7\pi^4}{640}(\ln z)^{-4}+\cdots\right)}$$

می دانیم که

$$z=e^{\frac{\mu}{kT}}\quad\Rightarrow\quad\mu=kT\ \ln z$$

$$\varepsilon_F \equiv \left(\frac{3N}{4\pi gV}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{h^2}{2m}$$

$$\mu^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{3N}{4\pi gV}\right)\left(\frac{h^2}{2m}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}+\frac{7\pi^4}{640}(\ln z)^{-4}+\cdots\right)^{-1}$$

$$\mu^{\frac{3}{2}}=\varepsilon_F^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}+\frac{7\pi^4}{640}(\ln z)^{-4}+\cdots\right)^{-1}$$

$$\mu=\varepsilon_F\left(1+\frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}+\frac{7\pi^4}{640}(\ln z)^{-4}+\cdots\right)^{-\frac{3}{2}}$$

در تقریب صفرم

$$\ln z=\frac{\mu}{kT}\quad\Rightarrow\quad\mu_\circ=\varepsilon_F$$

براي تقريب اول داريم:

$$\mu_1=\varepsilon_F\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right)=\varepsilon_F\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right)$$

$$\mu_2=\varepsilon_F\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_1}\right)^2+\frac{\pi^4}{720}\left(\frac{kT}{\mu_1}\right)^4\right)$$

$$\left(\frac{kT}{\mu_1}\right)^2=(kT)^2\mu_1^{-2}=(kT)^2\left(\varepsilon_F\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right)\right)^{-2}$$

$$=\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\frac{1}{1-\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2+\frac{\pi^4}{144}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4}$$

عبارت بالا را مي توان با استفاده از رابطه $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$ که در اينجا

$$x=-\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2+\frac{\pi^2}{144}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2$$

بسط داد

$$=(kT)^2\varepsilon_F^{-2}\left(1+\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right)$$

$$\left(\frac{kT}{\mu_1}\right)^2=\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\left(1+\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right)=\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2+\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4$$

مي توان عبارت بالا را به توان ۲ رساند و $\left(\frac{kT}{\mu_1}\right)^4$ را محاسبه کرد بنابراین:

$$\left(\frac{kT}{\mu_1}\right)^4=(kT)^4\,\mu_1^{-4}=(kT)^4\varepsilon_F^{-4}\left(1+\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right)$$

$$=\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4+\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^6$$

اگر از توانهاي بالاتر از ε صرفنظر کنیم آنگاه داریم:

$$\left(\frac{kT}{\mu_1}\right)^4=\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4$$

$$\mu=\varepsilon_F\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2+\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4\right)+\frac{\pi^4}{720}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4+\cdots\right)$$

$$\mu=\varepsilon_F\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2+\left(\frac{-\pi^4}{72}+\frac{\pi^4}{720}\right)\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4+\cdots\right)$$

$$\mu=\varepsilon_F\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2-\frac{\pi^4}{80}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4\right)$$

$$\begin{cases} U=\dfrac{3}{2}kTg\,\dfrac{V}{\lambda^3}f_{\frac{5}{2}}(z) \\[2ex] \dfrac{N}{V}=\dfrac{g}{\lambda^3}f_{\frac{3}{2}}(z) \end{cases}$$

$$U=\frac{3}{2}NkT\,\frac{f_{\frac{5}{2}}(z)}{f_{\frac{3}{2}}(z)}$$

$$f_{\frac{5}{2}}(z)=\frac{\left(\ln(z)\right)^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}\left(1+\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{\left(\ln(z)\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)\left(\frac{5}{2}-3\right)\frac{7\pi^4}{360}\frac{1}{\left(\ln(z)\right)^4}\right)$$

$$f_{\frac{3}{2}}(z)=\frac{\left(\ln(z)\right)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}\left(1+\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{\left(\ln(z)\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{3}{2}-3\right)\frac{7\pi^4}{360}\frac{1}{\left(\ln(z)\right)^4}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)=\frac{5\times3\times1}{2^3}\sqrt{\pi}=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\times1}{2^2}\sqrt{\pi}=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\mu=\varepsilon_F\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2-\frac{\pi^4}{80}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4\right)$$

$$\frac{U}{N}=\frac{3}{2}kT\,\frac{f_{\frac{5}{2}}(z)}{f_{\frac{3}{2}}(z)}=\frac{3}{2}kT\left(\frac{2}{5}\ln z\right)\left(\frac{1+\frac{5\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}-\frac{7\pi^4}{384}(\ln z)^{-4}}{1+\frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}+\frac{7\pi^4}{640}(\ln z)^{-4}}\right)$$

$$\frac{U}{N}=\frac{3}{5}\varepsilon_F\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2-\frac{\pi^4}{80}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4\right)$$

$$\times \frac{\left(1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2-\frac{33\pi^4}{384}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4\right)}{\left(1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2+\frac{61\pi^2}{1920}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4\right)}$$

$$\frac{U}{N}=\frac{3}{5}\varepsilon_F\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2-\frac{\pi^4}{80}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4\right)$$

$$\times\left(1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2+\frac{33\pi^4}{384}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4\right)$$

$$\times\left(1-\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2-\frac{61\pi^4}{1920}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4+\frac{\pi^2}{64}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4\right)$$

$$\frac{U}{N}=\frac{3}{5}\varepsilon_F\left(1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2-\frac{\pi^4}{16}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^4\right)$$

۸-۹

حل:

$$\frac{C_V}{Nk}=\frac{n}{s}\left(\frac{n}{s}+1\right)\frac{f_{\frac{n}{s}+1}(z)}{f_{\frac{n}{s}}(z)}-\left(\frac{n}{s}\right)^2\frac{f_{\frac{n}{s}}(z)}{f_{\frac{n}{s}-1}(z)}$$

$$\frac{C_p - C_V}{Nk} = \left(\frac{sC_V}{Nkn}\right)^2 \frac{f_{\frac{n}{s}-1}(z)}{f_{\frac{n}{s}}(z)}$$

$$z = e^{\frac{\mu}{kT}}$$

$$if \qquad T >> T_F \qquad z_\circ \to \circ \quad \Rightarrow \quad \frac{f_{n'}(z)}{f_n(z)} = \frac{z\left(1 - \frac{z}{2^{n'}} + \frac{z}{3^{n'}} + \cdots\right)}{z\left(1 - \frac{z}{2^n} + \frac{z}{3^n} + \cdots\right)} = 1$$

$$\frac{C_V}{Nk} = \frac{n}{s}\left(\frac{n}{s} + 1\right) - \left(\frac{n}{s}\right)^2 = \frac{n}{s}$$

$$\frac{C_p - C_V}{Nk} = \left(\frac{sC_V}{Nkn}\right)^2 = \left(\frac{s}{n}\right)^2 \left(\frac{C_V}{Nk}\right)^2 = \left(\frac{s}{n}\right)^2 \left(\frac{n}{s}\right)^2 = 1$$

می دانیم که

$$if \qquad T << T_F \qquad z_\circ \to \infty$$

$$f_{n-1}(z) = \frac{\partial}{\partial \ln z} fn(z)$$

بنابراین:

$$\frac{C_V}{Nk} = \frac{n}{s}\left(\frac{n}{s} + 1\right) \frac{f_{\frac{n}{s}+1}(z)}{\frac{\partial}{\partial \ln z} f_{\frac{n}{s}+1}(z)} - \left(\frac{n}{s}\right)^2 \frac{f_{\frac{n}{s}}(z)}{\frac{\partial}{\partial \ln z} f_{\frac{n}{s}}(z)}$$

$$\frac{C_V}{Nk} = \frac{n}{s}\left(\frac{\left(\frac{n}{s} + 1\right) f_{\frac{n}{s}+1}(z)}{f_{\frac{n}{s}}(z)} - \frac{\frac{n}{s} f_{\frac{n}{s}}(z)}{f_{\frac{n}{s}-1}(z)}\right)$$

$$\frac{C_V}{Nk}=\frac{n}{s}\left(\frac{\left(\frac{n}{s}+1\right)(\ln z)^{\frac{n}{s}+1}\left(1+\left(\frac{n}{s}+1\right)\left(\frac{n}{s}\right)\frac{\pi^2}{6}(\ln z)^{-2}+\cdots\right)}{\left(\frac{n}{s}\right)(\ln z)^{\frac{n}{s}}\left(1+\left(\frac{n}{s}\right)\left(\frac{n}{s}-1\right)\frac{\pi^2}{6}(\ln z)^{-2}+\cdots\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{n}{s}\right)(\ln z)^{\frac{n}{s}}\left(1+\frac{n}{s}\left(\frac{n}{s}-1\right)\frac{\pi^2}{6}(\ln z)^{-2}+\cdots\right)}{\left(\frac{n}{s}-1\right)(\ln z)^{\frac{n}{s}-1}\left(1+\left(\frac{n}{s}-1\right)\left(\frac{n}{s}-2\right)\frac{\pi^2}{6}(\ln z)^{-2}+\cdots\right)}\right)$$

$$\frac{C_V}{Nk}=\frac{n}{s}\left(\frac{\frac{n}{s}+1}{\frac{n}{s}}(\ln z)-\frac{\frac{n}{s}}{\frac{n}{s}-1}(\ln z)\right)=\frac{n}{s}\ln z\left(1+\frac{s}{n}-\frac{\frac{n}{s}}{\frac{n}{s}-1}\right)$$

$$=\frac{n}{s}\ln z\left(\frac{-1}{\left(\frac{n}{s}\right)\left(\frac{n}{s}-1\right)}\right)$$

$$\frac{C_p-C_V}{Nk}=\left(\frac{sC_V}{Nkn}\right)^2\frac{f_{\frac{n}{s}-1}(z)}{f_{\frac{n}{s}}(z)}$$

$$=\left(\frac{s}{n}\right)^2\left(\frac{C_V}{Nk}\right)^2\left(\frac{\left(\frac{n}{s}-1\right)(\ln z)^{\frac{n}{s}-1}}{(\ln z)^{\frac{n}{s}}}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{\left(\frac{n}{s}\right)\left(\frac{n}{s}-1\right)} \right)^2 \left(\frac{\frac{n}{s}-1}{\ln z} \right) = \frac{\left(\frac{s}{n}\right)^2}{\left(\frac{n}{s}-1\right)} \ln z$$

۱۱-۸

حل:

$$\mu \cong \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{\partial \ln a(\varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} \right)_{\varepsilon=\varepsilon_F} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 \right)$$

$$C_V \approx s \approx \frac{\pi^2}{3} k^2 T a(\varepsilon_F)$$

$$\sum(p) = \frac{1}{h^3} \int \cdots \int d^3p d^3q \approx \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{3} p^3$$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p^2 = 2m\varepsilon \Rightarrow p = (2m\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\sum(\varepsilon) = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{3} (2m\varepsilon)^{\frac{3}{2}}$$

$$a(\varepsilon) = \frac{d\sum(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{3} (2m)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln a(\varepsilon) = \ln\left[\frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \right] + \ln \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \ln a(\varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon}=\frac{1}{2}$$

$$\mu \approx \varepsilon_F\left[1-\frac{\pi^2}{6}\times\frac{1}{2}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_F=\left(\frac{3N}{4\pi gV}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{h^2}{2m}$$

$$a(\varepsilon_F)=\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3N}{4\pi gV}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{h}{(2m)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\pi V}{h^2}2m\left(\frac{3N}{4\pi gV}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$C_V \approx s \approx \frac{\pi^2}{3}k^2Ta(\varepsilon_F)=\frac{\pi^2}{3}kT^{2}\frac{2\pi V}{h^2}(2m)\left(\frac{3N}{4\pi gV}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$C_V=\pi^2kT\,\frac{2m}{h^2}\left(\left(\frac{2\pi V}{3N}\right)^3\frac{3N}{4\pi gV}\right)^{\frac{1}{3}}Nk$$

$$=\pi^2kT\,\frac{2m}{h^2}\left(\left(\frac{2\pi V}{3N}\right)^2\frac{1}{2g}\right)^{\frac{1}{3}}Nk$$

$$\frac{C_V}{Nk}\approx \pi^2kT\,\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi gV}{3N}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{2m}{h^2}$$

$$\frac{C_V}{Nk} \approx \frac{s}{Nk} \approx \frac{\pi^2}{2}\frac{kT}{\varepsilon_F}$$

$$\sum(p) = \frac{1}{h^3}\int\cdots\int\cdots d^n q\, d^n p = \frac{V}{h^n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}p^n$$

$$\varepsilon \propto p^s \;\Rightarrow\; \varepsilon = \gamma p^s \;\Rightarrow\; p = \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\sum(\varepsilon) = \frac{V}{h^n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{\frac{n}{s}}$$

$$a(\varepsilon) = \frac{d\sum(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{V}{h^n}\;\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\left(\frac{n}{s}\right)\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{\frac{n}{S}-1}$$

$$a(\varepsilon) = \frac{V}{h^n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!\,\gamma}\left(\frac{n}{s}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{\frac{n}{S}-1}$$

$$\ln a(\varepsilon) = \ln\left[\frac{V}{h^n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!\gamma}\frac{n}{s}\right] + \ln\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{\frac{n}{s}-1}$$

$$\frac{\partial \ln a(\varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} = \frac{n}{s} - 1 = \frac{n-s}{s}$$

$$\mu \approx \varepsilon_F\left[1-\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{n-s}{s}\right)\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$$

$$C_V \approx s \square \frac{\pi^2}{3}kT\,{}^{2}\frac{V}{h^n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\frac{n}{\gamma^s}\left(\frac{\varepsilon_F}{\gamma}\right)^{\frac{n}{s}-1}$$

سه بعدی

$$\begin{cases} n=3 \\ s=1 \\ \varepsilon\propto p\end{cases} \Rightarrow \quad \mu \approx \varepsilon_F\left[1-\frac{\pi^2}{6}\times 2\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$$

$$C_V \approx \frac{\pi^2}{3}kT\,{}^{2}\frac{V}{h^3}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)!}\frac{3}{\gamma}\left(\frac{\varepsilon_F}{\gamma}\right)^2$$

سه بعدی

$$\begin{cases} n=3 \\ s=2 \\ \varepsilon\propto p^2\end{cases} \Rightarrow \quad \mu \approx \varepsilon_F\left[1-\frac{\pi^2}{6}\times\left(\frac{1^{\circ}}{2}\right)\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$$

$$C_V \approx s \square \frac{\pi^2}{3}kT\,{}^{2}\frac{V}{h^3}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)!}\frac{3}{2\gamma}\left(\frac{\varepsilon_F}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$$

دو بعدی

$$\begin{cases} n=2 \\ s=1 \\ \varepsilon\propto p\end{cases} \Rightarrow \quad \mu \approx \varepsilon_F\left[1-\frac{\pi^2}{6}\times 1\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$$

$$C_V \square s \square \frac{\pi^2}{3} kT^{\,2} \frac{V}{h^2}\frac{\pi}{1!}\frac{2}{\gamma}\left(\frac{\varepsilon_F}{\gamma}\right)$$

دو بعدی

$$\begin{cases} n=2 \\ s=2 \\ \varepsilon \propto p^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \mu \square \varepsilon_F\left[1-\frac{\pi^2}{6}\times\circ\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]=\varepsilon_F$$

$$,C_V \square s \square \frac{\pi^2}{3} kT^{\,2}\frac{V}{h^2}\frac{\pi}{\gamma(1)!}\left(\frac{\varepsilon_F}{\gamma}\right)^{\circ}=\frac{\pi^3}{3}kT^{\,2}\frac{V}{h^2\gamma}$$

۱۳-۸

حل:

می دانیم که

$$\chi=\frac{M}{VB}=\frac{2\mu^* n^2}{\left.\frac{\partial\mu_\circ(xN)}{\partial x}\right|_{x=\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{N}{V}=\frac{g}{\lambda^3}f_{\frac{3}{2}}(z)$$

$$f_{\frac{3}{2}}(z)=\frac{4}{3\pi^{\frac{1}{2}}}(\ln z)^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}+\cdots\right]$$

$$\frac{N}{V}=\frac{4\pi g}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}(kT\ \ln z)^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{\pi^2}{8}(\ln z)^2+\cdots\right]$$

در تقریب مرتبه صفرم $T\to\circ$ داریم:

$$\frac{N}{V}=\frac{4\pi g}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(kT\ \ln z\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\mu=kT\ \ln z \quad \Rightarrow \quad \mu \approx \left(\frac{3N}{4\pi gV}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{h^2}{2m}=\varepsilon_F$$

$$g=1 \quad \Rightarrow \quad \mu_\circ(Nx)=\left(\frac{3Nx}{4\pi V}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{h^2}{2m}$$

$$\left.\frac{\partial\mu_\circ(Nx)}{\partial x}\right|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{2^{\frac{4}{3}}}{3}\left(\frac{3N}{4\pi V}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{h^2}{2m}=\frac{4}{3}\varepsilon_F$$

$$\chi=\frac{2n\mu^{*2}}{\frac{4}{3}\varepsilon_F}=\frac{3}{2}\frac{n\mu^{*2}}{\varepsilon_F}=\frac{3}{2}n\mu^{*2}\frac{1}{\varepsilon_F\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{3}{2\varepsilon_F}n\mu^{*2}\left[1+\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]=\chi_\circ\left[1+\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$$

$$\frac{N}{V}=\frac{g}{\lambda^3}f_{\frac{3}{2}}(z) \qquad \text{و} \qquad f_{\frac{3}{2}}(z)=\frac{N\lambda^3}{gV}$$

$$T\to\infty \qquad f_{\frac{3}{2}}(z)\approx z \qquad \mu_\circ(Nx)=kT\ \ln\left(\frac{xN\lambda^3}{V}\right)$$

$$\left.\frac{\partial\mu_{\circ}(Nx)}{\partial x}\right|_{x=\frac{1}{2}}=2kT \quad\Rightarrow\quad \chi_{\infty}=\frac{n\mu^{*2}}{kT}$$

$$f_{\frac{3}{2}}(z)\simeq z-\frac{z^{2}}{2^{\frac{3}{2}}} \;\Rightarrow\; z-\frac{z^{2}}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{N\lambda^{3}}{gV} \qquad\qquad \mu=kT\ln z$$

$$z\left(1-\frac{z}{2^{\frac{3}{2}}}\right)=\left(\frac{N\lambda^{3}}{gV}\right) \quad\Rightarrow$$

$$\ln z+\ln\left(1-\frac{z}{2^{\frac{3}{2}}}\right)=\ln\left(\frac{N\lambda^{3}}{gV}\right) \;,\; \ln(1-x)\simeq -x \quad\Rightarrow$$

$$\ln z=\ln\left(\frac{N\lambda^{3}}{gV}\right)+\frac{z}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mu=kT\ln z=kT\ln\left(\frac{N\lambda^{3}}{gV}\right)+kT\,\frac{z}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mu(Nx)=kT\ln\left(\frac{Nx\lambda^{3}}{gV}\right)+\frac{kT}{2^{\frac{3}{2}}}\,\frac{Nx\lambda^{3}}{gV}$$

$$z\simeq f_{\frac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad z=\frac{N\lambda^{3}}{gV}$$

$$\frac{\partial \mu(Nx)}{\partial x} = kT\,\frac{1}{x} + \frac{kT}{2^{\frac{3}{2}}}\,\frac{N\lambda^3}{gV}$$

$$\left.\frac{\partial \mu(Nx)}{\partial x}\right|_{x=\frac{1}{2}} = 2kT + \frac{kT}{2^{\frac{3}{2}}}\,\frac{N\lambda^3}{gV}$$

$$\chi = \frac{2\mu^{*2}n}{2kT\left[1+\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}\frac{N\lambda^3}{gV}\right]} = \frac{2\mu^{*2}n}{2kT}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}n\frac{\lambda^3}{g}\right)$$

$$\chi = \chi_\infty\left(1-\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}\frac{n\lambda^3}{g}\right)$$